MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 42
Kap 7.4: Gradienten. Optimering uten bibetingelser.

Lærebokoppgaver

[L] Kap. 7.4: 3-4
[L] Kap. 7.5: 1-5

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 7/3 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Finn gradienten $\nabla f(1,1)$ til f i punktet $(1,1)$.

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 2.
Bestem tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i $(x,y) = (1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$, $c = 5$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $c = 2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$, $c = 7$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$, $c = 3$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, $c = -1$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$, $c = 3$

g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$, $c = 2$

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $c = \sqrt{2}$

Oppgave 3.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$.

a) Vis at nivåkurven $f(x,y) = c$ er en ellipse når $c > -1$, og bestem sentrum (x_0, y_0) for ellipsen og dens halvakser a og b. Bruk dette til å skissere nivåkurvene for $c = 0, 1, 2, 3$ i samme koordinatsystem.

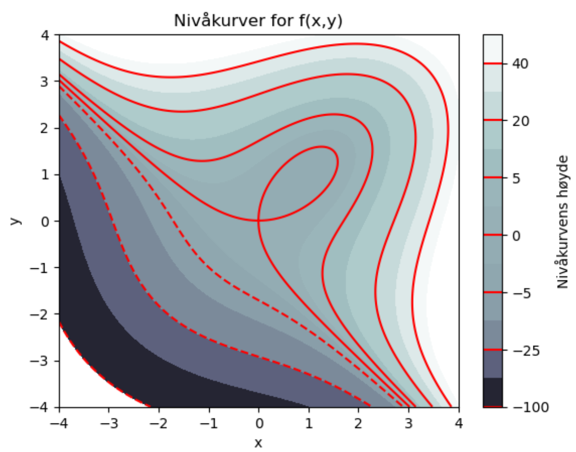
b) Finn tangentlinjene til nivåkurven gjennom $(x,y) = (1,1)$ og gjennom $(x,y) = (2,1/2)$, og tegn inn tangentene.

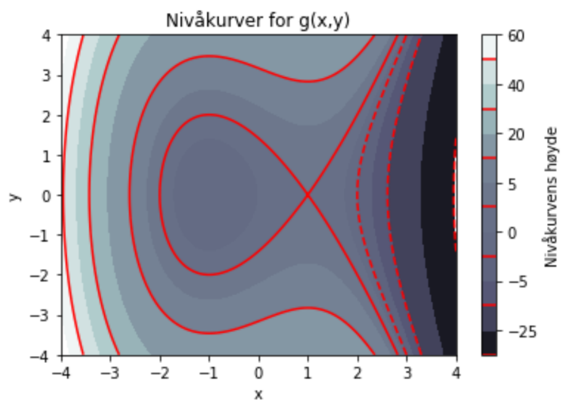
c) Finn $\nabla f(1,1)$ og $\nabla f(2,1/2)$, og tegn disse inn. Hva skjer med funksjonsverdiene langs gradienten?

d) Ser det ut som om funksjonen f har en minimums- eller maksimumsverdi? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

Oppgave 4.
Vi ser på nivåkurven $f(x,y) = c$ til funksjonen $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$. Hva slags kurve er dette? Beskriv gradienten til f i et punkt på nivåkurven geometrisk.

Oppgave 5.
Nivåkurver for to funksjoner f og g i området $-4 \le x, y \le 4$ er vist i figurene nedenfor.





a) Finn eventuelle lokale maksimumspunkter, minimumspunkter og salpunkter på tegningen.

b) Funksjonene f og g er to av funksjonene fra Oppgave 1 (se også Oppgave 5-7 fra Veiledningsoppgaver 40). Hvilke?

Oppgave 6.
Vis at gradienten $\nabla f(a,b)$ står normalt på tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i punktet (a,b), og at f vokser om vi går et kort stykke langs gradienten.

Oppgave 7.
Finn globale maksimums- og minimumspunkter, hvis de finnes:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Fasit

Oppgave 1.

a) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$

b) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$

c) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 12 \end{bmatrix}^T$

d) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \end{bmatrix}^T$

e) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

f) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T$

g) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$

Oppgave 2.

a) $y = -2x/3 + 5/3$

b) $y = -x + 2$

c) $y = -x/6 + 7/6$

d) $y = 1$

e) Ingen tangentlinje

f) $y = 1$

g) Ingen tangentlinje

h) $y = -x + 2$

Oppgave 3.

a) Ellipser med sentrum i (1,0) med halvakser $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \frac{1}{2}\sqrt{c+1}$.

b) Tangentlinjene har likning $y = 1$ og $y = -x/2 + 3/2$.

c) $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \end{bmatrix}^T$, og $\nabla f(2,1/2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}^T$, og funksjonsverdiene øker når vi beveger oss langs gradienten.

d) Ingen maksimumsverdi (halvaksen blir større jo større c er). Minimumsverdi $f(1,0) = -1$.

Oppgave 4.

Kurven er en sirkel med sentrum i $(-2,1)$ og radius $\sqrt{c+5}$. Gradienten peker bort fra sirkelens sentrum.

Oppgave 5.

a) f har lokalt min. i $(1,1)$ og salpunkt i $(0,0)$, og g har lokalt min. i $(-1,0)$ og salpunkt i $(1,0)$

b) f er funksjonen i (e) og g er funksjonen i (f)

Oppgave 7.

a) ingen globale maks./min.

b) $(0,0)$ er globalt min.

c) $(0,0)$ er globalt min.

d) $(1,0)$ er globalt min.

e) ingen globale maks./min.

f) ingen globale maks./min.

g) ingen globale maks./min.

h) $(0,0)$ er globalt min.