MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 48

Kap 7.6: Tolkning av Lagrangemultiplikatorer. Degenerert bibetingelse.

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 21/3 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Vi ser på følgende Lagrange-problem: $\max / \min\ f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + y^2 = 4$

a) Løs Lagrangebetingelsene og finn kandidatpunkter.
b) Finnes punkter med degenerert bibetingelse?
c) Løs optimeringsproblemet.

Oppgave 2.
Det er oppgitt at Lagrange-problemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = 4$ har maksimumsverdi $f(1,3) = 12$ i det ordinære kandidatpunktet $(x,y;\lambda) = (1,3;2)$. Hva er tolkningen av $\lambda = 2$? Bruk dette til å estimere maksimums-verdien til Lagrange-problemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = 3$.

Oppgave 3.
Hva vil det si at bibetingelsen er degenerert? Kan du gi eksempler på en bibetingelsen $g(x,y) = a$ som har et tillatt punkt med degenerert bibetingelse? Kan du finne en funksjon $f(x,y)$ slik at optimeringsproblemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = a$ har punktet med degenerert bibetingelse som maksimumspunkt?

Oppgave 4.
Vi betrakter Lagrange-problemet: $\min f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 4.$

a) Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2 + 4y^2 = 4$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
b) Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.
c) Løs Lagrange-problemet.
d) Gi en tolkning av Lagrangemultiplikatoren i et Lagrange-problem, og bruk denne tolkningen til å estimere minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet:
$\min f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 5$

Oppgave 5.
Vi betrakter funksjonen $f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$.

a) Vis at nivåkurven $f(x,y) = 2$ skjærer linjen $y = x$ i to punkter (a,a) og (b,b).
b) Finn tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 2$ i punktene (a,a) og (b,b).
c) Finn eventuelle stasjonære punkter for f, og klassifisér disse som lokale maksima, lokale minima eller salpunkter.

Fasit

Oppgave 1.

a) $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}; 1/2)$, $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}; -1/2)$

b) Nei

c) $f_{\text{max}} = 2$, $f_{\text{min}} = -2$

Oppgave 2.

$f_{\text{max}} \approx 12 + (-1) \cdot 2 = 10$

Oppgave 4.

a) Begrenset (ellipse)

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; 1/4)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; 1/4)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; -1/4)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; -1/4)$

c) $f_{\text{min}} = -1$

d) $f_{\text{min}} \approx -1.25$ når $x^2 + 4y^2 = 5$

Oppgave 5.

a) $(1, 1)$,$(-1, -1)$

b) $y = -2x + 3$, $y = -x/2 - 3/2$

c) $(-1, 1)$, salpunkt