MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 11/4 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Løs optimeringsproblemet. Tegn mengden D sammen med passende nivåkurver for f i samme koordinatsystem.

a) $\max / \min f(x,y) = x^2 + y^2$ når $x + y = 2$

b) $\max / \min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $2x + 3y = 6$

c) $\max / \min f(x,y) = y$ når $x^2 - y^2 = 1$

Oppgave 2.
Løs optimeringsproblemet: $\max / \min \; f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 \quad \text{når} \quad xy = 1$

Oppgave 3.
Vi ser på kurven C med likning $y(x^2 + y^2) = 2(x^2 - y^2)$.

a) Finn alle punktene på kurven C med $y = -1$.

b) Finn tangenten til C i hvert punkt med $y = -1$.

c) Løs optimeringsproblemet: $\max / \min \; f(x,y) = y \quad \text{når} \quad y(x^2 + y^2) = 2(x^2 - y^2)$

Oppgave 4.
Vi ser på funksjonen definert ved $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$.

a) Finn alle stasjonære punkter for f.

b) Regn ut Hesse-matrisen til f, og bruk den til å klassifisere de stasjonære punktene.

c) Avgjør om f har globale maksimums- eller minimumverdier.

d) Løs Lagrange-problemet: $\max f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$ når $x^2 + 2y^2 = 5$

Oppgave 5.
Vi betrakter Lagrange-problemet $\max / \min f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ når $x + y = 2$.

a) Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne kandidater $(x, y; \lambda)$ for maksimum og minimum.

b) Skriv funksjonen $f(x,y)$ ved å bruke at $(x+y)^2 = 2^2 = 4$ i alle tillatte punkter (alle punkter som oppfyller bibetingelsen). Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne kandidater $(x, y; \lambda)$ for maksimum og minimum i det nye Lagrange-problemet.

c) Løs bibetingelsen for en av variablene, og bruk dette til å forenkle uttrykket for $f(x,y)$ til en funksjon i én variabel. Løs optimeringsproblemet du nå får.

d) Sammenlikn svarene og vurder sammenhengen mellom de tre metodene. Løs så optimeringsproblemet.

Fasit

Oppgave 1.

a) $f_{\text{min}} = 2$, ingen maksimumsverdi

b) $f_{\text{min}} = 18$, ingen maksimumsverdi

c) ingen maksimumsverdi eller minimumsverdi

Oppgave 2.
Hverken maksimum eller minimum finnes.

Oppgave 3.

a) $(\pm\sqrt{1/3}, -1)$

b) $y = 2 \mp 3\sqrt{3}x$

c) $f_{\text{min}} = -2$, ingen maksimumsverdi. Husk å sjekke punkter med degenerert bibetingelse!

Oppgave 4.

a) $(0,0)$

b) lokalt minimumspunkt

c) $f_{\text{min}} = 1$, ingen maksimumsverdi

d) $f_{\text{max}} = 7$

Oppgave 5.

a) $(1,1;1)$

b) $(1,1;-3)$

c) $(1,1)$

d) $f_{\text{min}} = 1$, ingen maksimumsverdi