Eksamen	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	18. desember 2023 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver med lik vekt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.
Vi ser på matrisen A og vektorene $\mathbf{b}$ og $\mathbf{w}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

og kaller kolonnevektorene til A for $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

(a) Løs det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(b) Bestem alle (a,b,c) som er slik at $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

Oppgave 2.
Regn ut disse integralene:

a) $\displaystyle\int_1^2 4x \ln x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \, \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Området R i første kvadrant er begrenset av grafen til $f(x) = x^3 - x$, den rette linjen L gjennom origo med stigningstall 3, og x-aksen.

e) Tegn figur med området R markert, og finn arealet av området R.

Oppgave 3.
La matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 2 \\ t & 2 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut $|A|$.
(b) Finn A^{-1} når $t = 1$.
(c) Bestem alle verdier av t slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst en løsning.

Oppgave 4.
Vi ser på funksjonen f gitt ved $f(x,y) = \frac{xy}{x+y+1}$.

(a) Finn de stasjonære punktene til funksjonen f.
(b) Klassifiser de stasjonære punktene til f. Har f maksimums- eller minimumsverdier?

Oppgave 5.
Vi ser på Lagrange-problemet $\max f(x,y) = x - y$ når $x^2 + xy + y^2 = 3$.

(a) Skriv ned de tre Lagrange-betingelsene, og finn alle punkt $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse.
(b) Er det noen tillatte punkter med degenerert bibetingelse i dette problemet?
(c) Avgjør om Lagrange-problemet har en maksimumsverdi, og finn i så fall denne verdien.

Formelark

Finansmatematikk

Geometriske rekker.
En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.
Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal.
Arealet til området begrenset av $a \leq x \leq b$ og $f(x) \leq y \leq g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

Lineær algebra

Cramers regel.
Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

Funksjoner i to variabler

Andrederivert-testen.
Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Nivåkurver.
Nivåkurven $f(x,y) = c$ har derivert $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.
Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0,\ \mathcal{L}'_y = 0,\ g(x,y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0,\ g'_y = 0$$