Skoleeksamen (3t) MET11808 - Matematikk for siviløkonomer
12. desember 2023

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1 = 7\,000 \cdot 1{,}004^{20}$, multiplikasjonsfaktor $k = 1{,}004$ og antall ledd $n = 91 - 19 = 72$. Formelen for summen gir

$$7\,000 \cdot 1{,}004^{20} \cdot \frac{1{,}004^{72} - 1}{0{,}004} = \underline{\underline{631\,168{,}36}}$$

Oppgave 2

i) Bruker produktregelen: $f'(x) = (12x)' \cdot e^x + 12x \cdot (e^x)' = 12e^x + 12xe^x = \underline{\underline{12(1+x)e^x}}$

ii) Bruker brøkregelen: $f'(x) = \frac{(36-4x)'(x-7)-(36-4x)(x-7)'}{(x-7)^2} = \frac{-4(x-7)-(36-4x)\cdot 1}{(x-7)^2} = \underline{\underline{\frac{-8}{(x-7)^2}}}$

iii) Vi har $\ln(x^{50}) = 50 \cdot \ln(x)$ så $f'(x) = \underline{\underline{\frac{50}{x}}}$

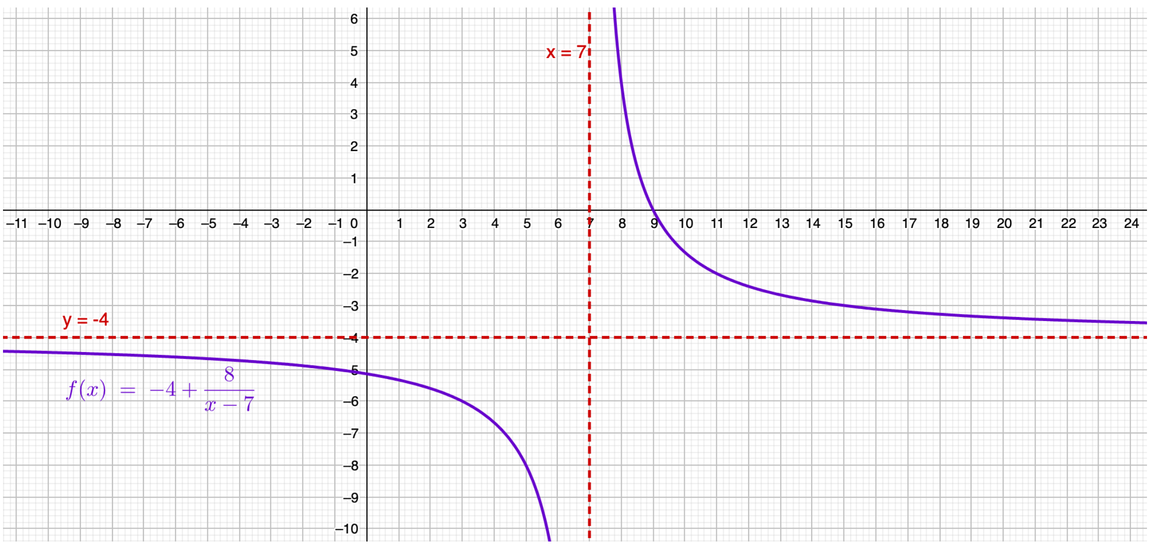
Oppgave 3

i) Vi bruker polynomdivisjon og får $f(x) = -4 + \frac{8}{x-7}$. Dette er standardformen for en hyperbelfunksjon med vertikal asymptote linjen $\underline{\underline{x = 7}}$ og horisontal asymptote linjen $\underline{\underline{y = -4}}$.

ii) Symmetripunktet er $(7\,,\,-4)$. Vi beregner noen verdier

x	-1	15	3	11	5	9
$f(x)$	-5	-3	-6	-2	-8	0

og tegner grafen og asymptotene ved å bruke alle de dataene vi har.



Figur 1: Grafen til $f(x)$

Oppgave 4

i) Vi setter begge sider av ulikheten inn i e^x. Siden e^x er en strengt voksende funksjon får vi en ekvivalent ulikhet: $e^{\ln(x+5)} \geqslant e^3$. Fordi e^x og $\ln(x)$ er omvendte funksjoner gir dette $x+5 \geqslant e^3$, dvs $\underline{\underline{x \geqslant e^3 - 5}}$.

ii) Hvis vi setter inn 1 krone på en konto med 24% rente og årlig forrentning vil saldo etter 100 000 år være $1{,}24^{100\,000}$. Beløpet $1{,}02^{1\,200\,000}$ er saldoen etter 100 000 år med månedlig forrentning, og er derfor størst.

Alternativ: $1{,}02^{1\,200\,000} = (1{,}02^{12})^{100\,000} = 1{,}26\ldots^{100\,000} > 1{,}24^{100\,000}$.

Oppgave 5

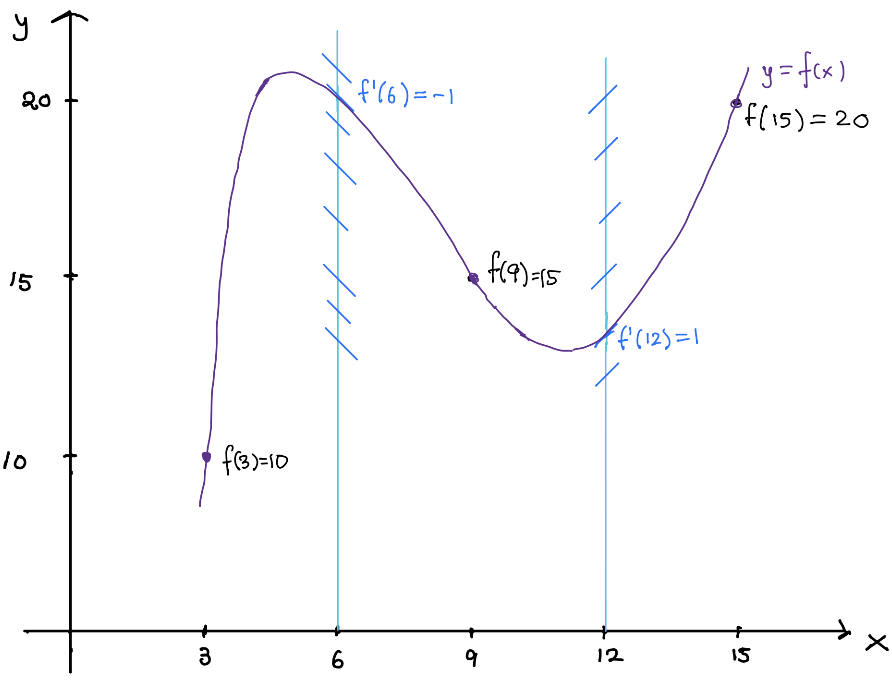
i) Vi lar r betegne internrenten. Da skal nåverdien til kontantstrømmen være lik 0. Det gir likningen

$$\underline{\underline{-20 + \frac{10}{(1+r)^5} + \frac{25}{(1+r)^6} = 0}}$$

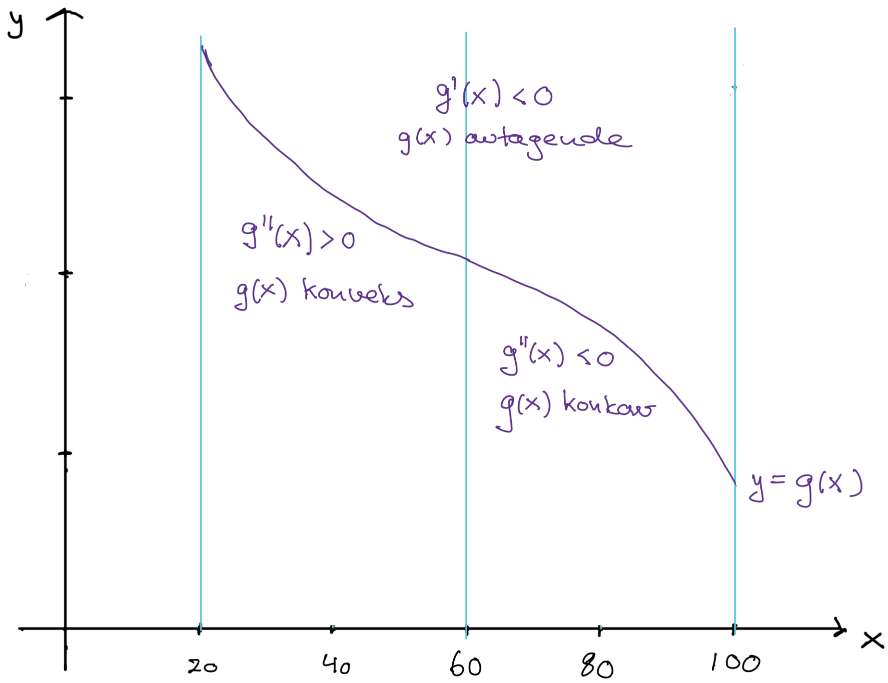
ii) Hvis vi setter inn $r = 10\%$ i venstresiden får vi at den blir 0,321. Hvis r øker vil potensene i nevnerene også øke og de positive brøkenes verdi minske (nåverdiene av fremtidige betalinger minsker når renten øker). Altså er internrenten (litt) større enn 10%.

Oppgave 6

i)



Figur 2: En mulig $f(x)$

ii) 

Figur 3: En mulig $g(x)$

Oppgave 7

i) Galt. Fordi $f'(x)$ er minst 0,6 i intervallet $[9, 11]$ er $f(x)$ strengt voksende og $f(9) < f(11)$.

ii) Rett. Stasjonære punkter for $f(x)$ er punkter der $f'(x)$ er lik 0. I intervallet $[2, 8]$ skjer dette for $x \approx 2{,}4$, $x \approx 4{,}2$ og $x \approx 7$.

iii) Rett. Vendepunkter for $f(x)$ er der $f''(x)$ skifter fortegn. Det er det samme som der $f'(x)$ har (lokale) maksimums- eller minimumspunkter. I intervallet $[2, 11]$ har $f'(x)$ to maksimumspunkter ($x \approx 3$ og $x \approx 9{,}4$) og ett minimumspunkt ($x \approx 5{,}3$).

Oppgave 8

i) Deriverer (bruker kjerneregelen på det andre leddet med $u(x) = rx$ og $g(u) = 100e^u$) og får at grensekostnadsfunksjonen er $K'(x) = 3 + 100re^{rx}$.

ii) Fordi kostnadsfunksjonen er strengt konveks ($K''(x) = 100r^2e^{rx} > 0$) får vi kostnadsoptimum som løsningen på likningen $K'(x) = A(x)$ hvor $A(x) = (3x + 100e^{rx})/x$ er gjennomsnittlig enhetskostnad – dette er et resultat. Altså

$$3 + 100re^{rx} = \frac{3x + 100e^{rx}}{x} \quad \text{dvs} \quad 3 + 100re^{rx} = 3 + \frac{100e^{rx}}{x} \quad \text{dvs} \quad 100re^{rx} \cdot x = 100e^{rx}$$

dvs $rx = 1$ så $x = r^{-1}$.

Minimal gjennomsnittlig enhetskostnad da $A(r^{-1}) = K'(r^{-1}) = 3 + 100re^{r \cdot r^{-1}} = 3 + 100er$

Oppgave 9

i) Vi har $D'(p) = 14(p-60)$ så

$$\varepsilon(p) = \frac{D'(p)\cdot p}{D(p)} = \frac{14(p-60)p}{7(p-60)^2} = \underline{\underline{\frac{2p}{p-60}}}$$

ii) Vi har at $\varepsilon(24) = \frac{2\cdot 24}{24-60} = -1{,}33$ som er mindre enn -1. Etterspørselen er derfor elastisk m.h.p. prisen for $p = 24$ og dermed vil inntekten gå ned hvis prisen øker litt.

Oppgave 10

i) Vi har $f(x) = x^{0{,}5}$ og ved potensregelen er $f'(x) = 0{,}5x^{-0{,}5}$ og $f''(x) = -0{,}25x^{-1{,}5}$. Med $x = 9$ får vi $f(9) = \sqrt{9} = 3$, $f'(9) = 0{,}5\cdot 9^{-0{,}5} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$ og $f''(9) = -0{,}25\cdot 9^{-1{,}5} = \frac{-1}{4\cdot 9\sqrt{9}} = \frac{-1}{108}$. Innsatt i formelen for Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2 ved $x = 9$ får vi

$$P_2(x) = f(9) + f'(9)(x-9) + \frac{1}{2}f''(9)(x-9)^2 = 3 + \frac{1}{6}(x-9) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{108}(x-9)^2$$
$$= \underline{\underline{3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2}}$$

ii) Vi setter $x = 10$ inn i $P_2(x)$ for å bestemme en tilnærmet verdi til $\sqrt{10}$.

$$\sqrt{10} \approx P_2(10) = 3 + \frac{1}{6}\cdot 1 - \frac{1}{216}\cdot 1^2 = \underline{\underline{3{,}1620}}$$

Oppgave 11

i) Vi tenker på y som en funksjon av x og deriverer begge sider av likningen m.h.p. x og får likningen $3x^2 - 4y - 4xy' + 2yy' = 0$, dvs $(4x-2y)y' = 3x^2 - 4y$, dvs

$$\underline{\underline{y' = \frac{3x^2-4y}{4x-2y}}} \qquad (**)$$

ii) Setter inn $x = 3$ i likningen for C, dvs $y^2 - 12x = -27$, og løser for y. Fullfører kvadratet og får $(y-6)^2 = -27 + 36 = 9$, dvs $y - 6 = \pm 3$, dvs $\underline{\underline{y = 9}}$ eller $\underline{\underline{y = 3}}$.

Stigningstallene for tangentene til C i disse punktene finner vi ved å sette x- og y-verdiene inn i $(**)$.

$$(3,9):\quad y' = \frac{3\cdot 3^2 - 4\cdot 9}{4\cdot 3 - 2\cdot 9} = \frac{-9}{-6} = \underline{\underline{1{,}5}} \qquad (3,3):\quad y' = \frac{3\cdot 3^2 - 4\cdot 3}{4\cdot 3 - 2\cdot 3} = \frac{15}{6} = \underline{\underline{2{,}5}}$$

Oppgave 12

i) Vi ser at $5\ln(x) + 10 \to 0^+$ og $100\ln(x) \to 100\ln(e^{-2}) = -200$ når $x \to (e^{-2})^+$ som betyr at $f(x) \longrightarrow -\infty$ og spesielt er linjen $\underline{\underline{x = e^{-2}}}$ en vertikal asymptote. Hvis $x \to \infty$ vil $100\ln(x) \to \infty$ og $5\ln(x) + 10 \to \infty$ så vi kan bruke l'Hôpitals regel til å finne grensen.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{[100\ln(x)]'}{[5\ln(x)+10]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{100}{x}}{\frac{5}{x}} = \frac{100}{5} = 20$$

Altså er linjen $\underline{\underline{y = 20}}$ en horisontal asymptote for $f(x)$.

ii) For å finne det omvendte funksjonsuttrykket $g(x)$ løser vi likningen $y = f(x)$ for x.

$$y = \frac{100\ln(x)}{5\ln(x)+10} \quad \text{dvs} \quad 5y\ln(x)+10y = 100\ln(x) \quad \text{dvs} \quad (5y-100)\ln(x) = -10y$$

som gir

$$\ln(x) = \frac{-10y}{5y-100} = \frac{2y}{20-y} \quad \text{som innsatt i } e^x \text{ gir} \quad x = e^{\frac{2y}{20-y}}$$

Vi bytter variabler og får $\underline{\underline{g(x) = e^{\frac{2x}{20-x}}}}$. Vi får definisjonsmengden $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle \leftarrow, 20\rangle}}$ fra utregningene i (i) og verdimengden $V_g = D_f = \underline{\underline{\langle e^{-2}, \rightarrow\rangle}}$.