SENSORVEILEDNING

MET 11803
Matematikk

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	17.12.2014	Kl. 09:00
Innlevering:	17.12.2014	Kl. 14:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Oppgave 1

Finn følgende integraler

a. $\int_0^2 (x^2 + \sqrt{x})dx$

b. $\int \ln(ax)dx$, hvor a er en positiv konstant.

c. $\int \dfrac{x^3}{x(x+1)}dx$

d. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

e. Arealet begrenset av grafen til $f(x) = x^{10}$ og $g(x) = x^{11}$, kan finnes ved hjelp av integrasjon. Lag figur og skraver arealet. Hva blir arealet?

Løsning:

a. $\int_0^2 (x^2 + \sqrt{x})dx = \int_0^2 (x^2 + x^{\frac{1}{2}})dx = \Big|_0^2 \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}2^3 + \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{3}0^3 + \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}) = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{2\sqrt{8}}{3}$.

b. $\int \ln(ax)dx = \int(\ln x + \ln a)dx = x\ln x - x + (\ln a)x + K$ (Her brukte vi at $\int(\ln x)dx = x\ln x - x + K$ som vi finner ved delvis integrasjon av $\int 1 \cdot \ln x dx$)

c. $\int \dfrac{x^3}{x(x+1)}dx$ Her lønner det seg å forkorte med x først, og deretter polynomdividere. Polynomdivisjon av $\dfrac{x^2}{(x+1)}$ gir: $x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Integralet blir: $\int \dfrac{x^3}{x(x+1)}dx = \int(x - 1 + \dfrac{1}{x+1})dx = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + K$.

d. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx = x2e^{\frac{x}{2}} - 1 \cdot \int 2e^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + K = (2x-4)e^{\frac{x}{2}} + K$

e. Figurskisse:

Areal=$\int_0^1 (x^{10} - x^{11})dx = \Big|_0^1 \frac{1}{11}x^{11} - \ frac112x^{12} = \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{132}$

Oppgave 2

La $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, hvor F er definert for alle x og y.

a. Finn eventuelle stasjonære punkter, og klassifiser disse.

b. La området D være begrenset av linjene $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$ og $y = -x - 1$. Tegn D i et koordinatsystem.

c. Finn de globale maksimums- og minimumspunktene til $F(x, y)$ når definisjonsområdet er D. Angi også de tilhørende maksimums- og minimumsverdiene. (Punktet teller dobbelt)

Løsning:

a. Stasjonære punkter:

I. $F'_x = 2x - 3y = 0$

II. $F'_y = -3x + 2y = 0$

Dette likningssystemet har kun en løsning $x = 0$ og $y = 0$. $(F(0, 0) = 0)$

Klassifikasjon:

$A = F''_{xx} = 2$, $C = F''_{yy} = 2$, $A = F''_{yx} = -3$. Det gir $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-3)^2 = -5 < 0$. Punktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt.

b. Figurinn

c.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$

Kandidater for globale maks og min.

På det indre:

Vi må ha et stasjonært punkt. Vi har kun ett som vi fant i a. $(F(0, 0) = 0$, samtidig vet vi at dette indre punktet er et sadelpunkt og følgelig ikke vil være verken globalt maksimum eller globalt minimum.)

Hjørnene: $F(\pm 1, 0) = F(0, \pm 1) = 1$

Sidekantene.

Sidekanten $y = x + 1$ hvor $-1 \leq x \leq 0$:

$F(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 - 3x(x+1)$

$F'(x, x+1) = 2x + 2(x+1) - 6x - 3 = 0$. D.v.s. $-2x = 1$. Altså $x = -\frac{1}{2}$. Denne x-verdien er i området. $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 - 3(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$.

Sidekanten $y = x - 1$ hvor $0 \leq x \leq 1$:

$F(x, x-1) = x^2 + (x-1)^2 - 3x(x-1)$

$F'(x, x-1) = 2x + 2(x-1) - 6x + 3 = 0$. D.v.s. $-2x = -1$. Altså $x = \frac{1}{2}$. Denne x-verdien er i området. $F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$.

Sidekanten $y = -x + 1$ hvor $0 \leq x \leq 1$:

$F(x, -x+1) = x^2 + (-x+1)^2 - 3x(-x+1)$

$F'(x, -x+1) = 2x - 2(-x+1) + 6x - 3 = 0$. D.v.s. $10x = 5$. Altså $x = \frac{1}{2}$. Denne x-verdien er i området. $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Sidekanten $y = -x - 1$ hvor $-1 \leq x \leq 0$:

$F(x, -x-1) = x^2 + (-x-1)^2 - 3x(-x-1) = x^2 + (x+1)^2 + 3x(x+1)$

$F'(x, -x-1) = 2x + 2(x+1) + 6x + 3 = 0$. D.v.s. $10x = -5$. Altså $x = -\frac{1}{2}$. Denne x-verdien er i området. $F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 - 3(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Konklusjon: F har global maksimumsverdi lik $\frac{5}{4}$ for de to punktene $(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})$. Og global minimumsverdi lik $-\frac{1}{4}$ for to de punktene $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$.

Oppgave 3

a. Finn den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. For hvilke verdier av a har likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ x_1 + x_2 \quad &= 3 \\ ax_1 + \quad + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

en løsning?

Løs likningssystemet for $a = -1$.

c. La $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Finn B^{-2}

d. Løs matriselikningen

$BX - 2I = B^{-1}$

hvor I er identitetsmatrisen.

Løsning:

a.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje1 med linje1-linje2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje2 med linje2-linje1 og linje3 med linje1+ linje3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

Siden $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ for alle a, har likningsystemet en løsning for alle a.

Løsning for $a = -1$. Vi kan bruke svaret fra a.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. gir $kof(B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ og $adj(B) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinanten til B er $1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -1$. Det betyr at

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-2} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

d. $BX - 2I = B^{-1}$ gir at $BX = 2I + B^{-1}$. Vi ganger B^{-1} fra venstre og får $X = 2B^{-1} + B^{-2}$. Vi setter inn og regner ut:

$$X = 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

Simen lover storebroren sin, Espen, at han skal få en 100-lapp hver tredje måned i to år (i alt 8 hundrelapper). Han får første hundrelapp om tre måneder.

a. Hva er nåverdien til disse 8 hundrelappene som Simen lover, når månedsrenten er på 1 prosent?

b. Rett etter Simen har gitt Espen 4 hundrelapper, ønsker Simen å bli kvitt de fire gjenværende betalingene raskere. Han vil nå betale hver måned med første betaling om en måned. Hvilket beløp skal han betale hver måned for at betalingene skal ha samme nåverdi som den opprinnelige betalingsplanen?

Løsning:

a. Vi starter med å regne ut kvartalsrenten. $1 + r = (1 + \frac{1}{100})^3 = 1,030301$.

Nåverdi $S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 100 \cdot \frac{1-(1+0,030301)^{-8}}{0,030301} = 701,0787 \approx 701,08$.

b.

Nåverdi til gjenværende betalinger: $S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 100 \cdot \frac{1-(1+0,030301)^{-4}}{0,030301} = 371,442 \approx 371,44$.

Nåverdi til gjenværende betalinger av et beløp A hvor vi har månedsrente på 1 prosent:

$S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = A \cdot \frac{1-(1+0,01)^{-4}}{0,01} = 3,90196A$.

Samme nåverdi gir $A = \frac{371,442}{3,90196} \approx 95,19$.

Oppgave 5

La kostnadsfunksjonen til en bedrift være gitt ved $K(x) = x^2 + x$, der x er antall produserte enheter. Markedsprisen er p ($p \geq 1$) per enhet.

a. For hvilket produsert kvantum er grensekostnaden 25?

b. Sett opp profittfunksjonen og finn maksimal profitt π_{max} som funksjon av p. (Vi kaller denne funksjonen $\pi_{max}(p)$.)

c. Finnes det en p slik at $\pi_{max}(p) = 1000$. Hvis ja, finn denne. Hvis nei, begrunn hvorfor ikke.

Løsning:

a. Grensekostnad: $K'(x) = 25$ gir $2x + 1 = 25$. Altså $x = 12$.

b. $\pi(x) = px - (x^2 + x)$. Maksimal profitt: $\pi'(x) = p - (2x + 1) = 0$. Som gir $x = \frac{p-1}{2}$. Vi ser at $\pi'' = -2$ følgelig lokalt maksimum ved andrederivert-testen. (Vi ser at produksjonskvantumet er ikke negativt for $p \geq 1$.) Maksimal profitt blir: $\pi(\frac{p-1}{2}) = \frac{p-1}{2}(p - (\frac{p-1}{2} - 1)) = \frac{p-1}{2}(\frac{p}{2} - \frac{1}{2}) = (\frac{p-1}{2})^2$. Med andre ord $\pi_{max}(p) = \frac{(p-1)^2}{4}$.

c. $\pi_{max}(p) = (\frac{p-1}{2})^2 = 1000$ gir $\frac{p-1}{2} = 10\sqrt{10}$. Altså $p = 20\sqrt{10} + 1$.

Oppgave 6

Kikki har nyttefunksjon $N(x, y) = \sqrt{xy}$, hvor x er kilo peanøtter og y kilo blåbær. Kiloprisen for peanøtter 10 kroner og kiloprisen for blåbær er 20 kroner. Kikki har 100 kroner og bruker hele summen.

a.Hvor mange kilo av henholdsvis peanøtter og blåbær kjøper hun?

b. Prisen på peanøtter og blåbær dobles hver uke, og Kikki handler hver uke peanøtter og blåbær for 100 kroner. Kall antall kilo Kikki kjøper av peanøtter i uke i for A_i og antall kilo blåbær B_i. Finn $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i$ og $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_i$.

Løsning:

$L = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \lambda(10x + 20y - 100)$

Deriverer, setter lik null og flytter λ-ledd over gir:

I. $L'_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 10\lambda$

II. $L'_y = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = 20\lambda$

I/II gir $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$. Det gir $x = 2y$ Satt inn i $10x + 20y - 100 = 0$ gir $10 \cdot 2y + 20y = 100$ eller $40y = 100$. Konklusjon: $y = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$ og $x = 2y = 5$.

b. Så lenge prisforholdet er uforandret, får vi $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$. Det betyr at $A_1 = 5$ og $B_1 = \frac{5}{2}$, og videre at $A_2 = 5 \cdot \frac{1}{2}$ og $B_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}$. (Dobles prisen får vi halvparten så mye, osv...)

Vi har to geometriske rekker med $k = \frac{1}{2}$. Summene blir

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 10$ og $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_i = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 5$.