EKSAMENSOPPGAVE - Skoleeksamen

MET 11803
Matematikk

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	17.12.2014	Kl. 09.00
Innlevering:	17.12.2014	Kl. 14.00

Vekt:	70% av MET 1180
Antall sider i oppgaven:	6 inkl. forsiden
Antall vedleggsfiler:	0
Tillatte hjelpemidler	Kun eksamenskalkulator TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™ tillatt.
Innføringsark:	Ruter

Maks. ant. vedleggsfiler til besvarelsen	1
Kontinuasjon	Ordinær

Oppgave 1

Finn følgende integraler

a. $\int_0^2 (x^2 + \sqrt{x})dx$

b. $\int \ln(ax)dx$, hvor a er en positiv konstant.

c. $\int \dfrac{x^3}{x(x+1)}dx$

d. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

e. Arealet begrenset av grafen til $f(x) = x^{10}$ og $g(x) = x^{11}$, kan finnes ved hjelp av integrasjon. Lag figur og skraver arealet. Hva blir arealet?

Oppgave 2

La $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, hvor F er definert for alle x og y.

a. Finn eventuelle stasjonære punkter, og klassifiser disse.

b. La området D være begrenset av linjene $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$ og $y = -x - 1$. Tegn D i et koordinatsystem.

c. Finn de globale maksimums- og minimumspunktene til $F(x, y)$ når definisjonsområdet er D. Angi også de tilhørende maksimums- og minimumsverdiene. (Punktet teller dobbelt.)

Oppgave 3

a. Finn den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. For hvilke verdier av a har likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \quad\quad &= 1 \\ x_1 + x_2 \quad\quad &= 3 \\ ax_1 + \quad\quad + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

en løsning?

Løs likningssystemet for $a = -1$.

c. La $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Finn B^{-2}.

d. Løs matriselikningen

$BX - 2I = B^{-1}$

hvor I er identitetsmatrisen.

Oppgave 4

Simen lover storebroren sin, Espen, at han skal få en 100-lapp hver tredje måned i to år (i alt 8 hundrelapper). Han får første hundrelapp om tre måneder.

a. Hva er nåverdien til disse 8 hundrelappene som Simen lover, når månedsrenten er på 1 prosent?

b. Rett etter Simen har gitt Espen 4 hundrelapper, ønsker Simen å bli kvitt de fire gjenværende betalingene raskere. Han vil nå betale hver måned med første betaling om en måned. Hvilket beløp skal han betale hver måned for at betalingene skal ha samme nåverdi som den opprinnelige betalingsplanen?

Oppgave 5

La kostnadsfunksjonen til en bedrift være gitt ved $K(x) = x^2 + x$, der x er antall produserte enheter. Markedsprisen er p ($p \geq 1$) per enhet.

a. For hvilket produsert kvantum er grensekostnaden 25?

b. Sett opp profittfunksjonen og finn maksimal profitt π_{max} som funksjon av p. (Vi kaller denne funksjonen $\pi_{max}(p)$.)

c. Finnes det en p slik at $\pi_{max}(p) = 1000$? Hvis ja, finn denne. Hvis nei, begrunn hvorfor ikke.

Oppgave 6

Kikki har nyttefunksjon $N(x, y) = \sqrt{xy}$, hvor x er kilo peanøtter og y kilo blåbær. Kiloprisen for peanøtter 10 kroner og kiloprisen for blåbær er 20 kroner. Kikki har 100 kroner og bruker hele summen.

a. Hvor mange kilo av henholdsvis peanøtter og blåbær kjøper hun?

b. Prisen på peanøtter og blåbær dobles hver uke, og Kikki handler hver uke peanøtter og blåbær for 100 kroner. Kall antall kilo Kikki kjøper av peanøtter i uke i for A_i og antall kilo blåbær B_i. Finn $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i$ og $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_i$.

Rekker og finansmatematikk

Bankformel: Setter du inn et beløp A i banken med rente r per år, har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ hvor n er antall år.

Sum aritmetisk rekke: $S(n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{(n-1)d}{2})$.

Sum geometrisk rekke: $S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$

En geometrisk rekke med uendelig mange ledd er konvergent for $-1 < k < 1$, og summen er: $S = a_1 \frac{1}{1-k}$

Nåverdi av A om t tidsperioder: $\frac{A}{(1+r)^t}$

Kontinuerlig forrenting: $A_t = A_0 e^{rt}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = A \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling umiddelbart):

$S = A(r+1) \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = \frac{A}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling umiddelbart): $S = \frac{A(1+r)}{r}$

Formel for terminbeløp ved annuitetslån: $A = K \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Funksjonsanalyse for funksjoner i to variabler

Kandidater for (lokale) topp og bunn: $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

Test: $\Delta > 0, A > 0$ bunn, $\Delta > 0, A < 0$ topp, $\Delta < 0$ sadel.

$(\Delta = AC - B^2$, hvor $A = f''_{xx}(x,y), B = f''_{xy}(x,y), C = f''_{yy}(x,y))$

Totalderivert-formel: $z = f(x(t), y(t))$ gir $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Derivert til nivåkurve $f(x,y) =$ konstant: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

Lagrange funksjon: $L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$

Integrasjon

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + K$ (dersom $n \neq -1$)

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + K$ (dersom $n = -1$)

$\int e^x dx = e^x + K$

Delvis integrasjon: $\int u' \cdot v dx = (u \cdot v) - \int u \cdot v' dx$

Eksempel (Substitusjon): $\int e^{2x}dx$, $u = 2x$ gir $\int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{2x} + K$. ($\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$)

Eksempel (Delbrøk): $\int \frac{2}{x^2-1}dx$, skriv $\frac{2}{x^2-1}$ som $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ og finn A og B.

Lineær algebra

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Et lineært likningssystem bestående av n likninger med n ukjente:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Cramers regel:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ (NB! $det(A) \neq 0$)

$adj(A) = kof(A)^t$.

$$kof(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & \cdots & (-1)^{n+1}A_{1n} \\ -A_{21} & A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2}A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}A_{n1} & (-1)^{n+2}A_{n2} & \cdots & (-1)^{2n+1}A_{nn} \end{bmatrix},$$

hvor A_{ij} er den determinanten som framkommer ved å stryke i'te rekke og j'te søyle i A.