SENSORVEILEDNING

MET 11803
Matematikk

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	29.04.2015	Kl. 09:00
Innlevering:	29.04.2015	Kl. 14:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Oppgave 1

Beregn følgende integraler

a. $\int_1^2 (\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x})dx$

b. $\int \frac{x^3+x+1}{x+1}dx$

c. $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}e^{\sqrt{x^3+x}}dx$

d. $\int xe^{4x}dx$

e. Bestem arealet begrenset av grafen til $f(x) = \ln x$ og linjene $y = -1 =$ og $x = 2$.

Løsning:

a. $\int_1^2 (\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x})dx = \int_1^2 x^{-3} + \frac{1}{x})dx = \Big|_1^2 \frac{1}{-2}x^{-2} + \ln|x| = -\frac{1}{2}(2^{-2} - 1) + \ln|2| - \ln|1| = \ln 2 - \frac{1}{2}(-\frac{3}{4}) = \ln 2 + \frac{3}{8}$.

b. $\int \frac{x^3+x+1}{x+1}dx = \int (x^2 - x + 2 - \frac{1}{x+1})dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - \ln|x+1| + K$

c. Vi beregner $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}e^{\sqrt{x^3+x}}dx$ ved substitusjon. Vi setter $u = \sqrt{x^3+x}$ og får $dx = 2\frac{\sqrt{x^3+x}}{3x^2+1}du$. Integralet blir da: $\int 2e^u du = 2e^u + K = 2e^{\sqrt{x^3+x}} + K$

d. $\int xe^{4x}dx = x \cdot \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = \frac{x}{4}e^{4x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}e^{4x} = \frac{4x-16}{16}e^{4x} + K$

e. Figur:

$A = \int_{\frac{1}{e}}^2 (\ln x + 1)dx = \Big|_{\frac{1}{e}}^2 x\ln x - x + x = 2\ln 2 - \frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e}) = 2\ln 2 + \frac{1}{e}$.

(Husk at $\int \ln x dx = x\ln x - x + K$ (Delvis integrasjon)).

Oppgave 2

La $h(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2$.

a. Finn stasjonære punkter.

b. Klassifiser punktene du fant i a.

c. La området D være gitt ved $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Finn globale maksimums- og minimumspunkter når h er definert på D.

d. La l være tangentlinja til nivåkurven $x^2+2y^2-3x^2y^2 = 0$ i $(1,1)$. Hvor skjærer tangentlinja l x-aksen?

Løsning:

a. Stasjonære punkter:

I. $h'_x = 2x - 6xy^2 = 0$ gir $2x(1-3y^2) = 0$

II. $h'_y = 4y - 6x^2y = 0$ gir $2y(2-3x^2) = 0$

Vi ser at $x = 0$ impliserer $y = 0$ (fra likning II). Det betyr at $(0,0)$ er et stasjonært punkt.

$x \neq 0$ gir $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y \neq 0$ gir $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ Vi får fem stasjonære punkter: $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ og $(0,0)$.

b. $A = 2-6y^2$ $C = 4-6x^2$ $B = 12xy$ For alle punktene utenom $(0,0)$ er $AC = 0$ siden $y^2 = \frac{1}{3}$ og $x^2 = \frac{2}{3}$. Det betyr at $AC - B^2 < 0$ (siden $B = 12xy \neq 0$). Altså fire sadelpunkter.

For $(0,0)$ er det omvendt. $B = 0$ og $AC = 2 \cdot 4 > 0$. Det gir lokalt minimum $(A > 0)$.

c. Siden vi har kun et stasjonært punkt på det indre av området og det er et sadelpunkt, har vi ingen kandidater til globale maks- eller minpunkter på det indre.

Hjørnene:

$(0,0)$ gir $h(0,0) = 0^2 + 2\cdot 0^2 - 3\cdot 0^2 \cdot 0^2 = 0$

$(1,0)$ gir $h(1,0) = 1^2 + 2\cdot 0^2 - 3\cdot 1^2 \cdot 0^2 = 1$

$(0,1)$ gir $h(0,1) = 0^2 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 \cdot 0^2 = 2$

$(1,1)$ gir $h(1,1) = 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 = 0$

Vi må sjekke sidekantene:

$x = 0$ gir $h(0,y) = 2y^2$ og $h'(0,y) = 4y$ og $h'(0,y) = 0$ gir $y = 0$ som er et hjørne. Ingen nye kandidater.

$x = 1$ gir $h(1,y) = 1 - y^2$ og $h'(1,y) = -2y$ og $h'(1,y) = 0$ gir $y = 0$ som er et hjørne. Ingen nye kandidater.

$y = 0$ gir $h(x,0) = x^2$ og $h'(x,0) = 2x$ og $h'(x,0) = 0$ gir $x = 0$ som er et hjørne. Ingen nye kandidater.

$y = 1$ gir $h(x,1) = 2 - 2x^2$ og $h'(x,1) = -4x$ og $h'(x,1) = 0$ gir $x = 0$ som er et hjørne. Ingen nye kandidater.

Altså:

$(0,1)$ gir globalt maks med maksimumsverdi 2

$(0,0)$ og $(1,1)$ globalt min med minimumsverdi 0.

d. Tangentlinja er gitt ved $y - 1 = a(x - 1)$ hvor $a = -\frac{h'_x}{h'_y} = -\frac{2x(1-3y^2)}{2y(2-3x^2)} = -\frac{2\cdot 1\cdot(1-3\cdot 1^2)}{2\cdot 1(2-3\cdot 1^2)} = -\frac{-2}{-1} = -2$.

Altså får vi $y - 1 = -2(x - 1)$. Skjæring med x-aksen: Vi setter inn $y = 0$ og får $-1 = -2x + 2$. Det gir $x = \frac{3}{2}$. Tangentlinja skjærer x-aksen i $(\frac{3}{2}, 0)$.

Oppgave 3

a. Finn summen, $S(n)$, av de n første leddene til rekka $x - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{5^2} - \frac{x^4}{5^3} + \dots$.

b. For hvilke x konvergerer rekka (m.a.o. at $\lim_{n\to\infty} S(n)$ eksisterer.)? Bestem summen i dette tilfellet.

c. Finnes det en x slik at den uendelige summen er lik -8? Hvis ja, finn den tilhørende x-verdien. Hvis nei, begrunn hvorfor dette ikke er mulig.

Løsning:

a. Vi bruker formelen $S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$ og får $S(n) = x\frac{1-(-\frac{x}{5})^n}{1-(-\frac{x}{5})} = x\frac{1-(-\frac{x}{5})^n}{1+\frac{x}{5}} = 5x\frac{1-(-\frac{x}{5})^n}{5+x}$.

b. Rekka konvergerer for $|\frac{x}{5}| < 1$. Det vil si $-5 < x < 5$. Summen er $\frac{5x}{5+x}$.

c. Vi må løse $\frac{5x}{5+x} = -8$. Vi får $5x = -8(5+x)$. Vi får $13x = -40$. Altså er $x = -\frac{40}{13}$ siden denne x verdien ligger i konvergensintervallet, er denne løsningskandidaten ok. Svar: $x = -\frac{40}{13}$.

Oppgave 4

En bedrift har kostnadsfunksjon $K(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

a. For hvilke x er grensekostnaden lik 1?

b. For hvilke x er grensekostnaden maksimal?

Løsning:

a. $K'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = 1$ gir $2x + 2 = x^2 + 2x + 2$. Vi får $x^2 = 0$. Det vil si at grensekostnaden er lik 1 for $x = 0$.

b. Vi deriverer $K'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ og får

$K''(x) = \frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+4-4x^2-8x-4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$. Den deriverte til grensekostnaden er lik null når $-2x^2 - 4x = -2x(x+2) = 0$. Husk at kun x-verdier større enn lik null har mening.Siden $K''(x) < 0$ for alle x ikke negative x, er $x = 0$ et globalt maksimum. Grensekostnaden er maksimal for $x = 0$.

Oppgave 5

a. Regn ut determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

For hvilke verdier av a er determinanten null?

b. Betrakt likningsystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + \quad x_3 &= a \\ ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + x_3 &= a \end{aligned}$$

For hvilke verdier av a har likningsystemet en entydig løsning? Finnes det verdier av a hvor likningssystemet har ingen løsning?

c. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Regn ut $AB - BA$.

d. Løs likningen $(AB - BA)X = (AB - BA)^{-1}A$

Løsning:

a. $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-1) - a = a^2 - 2a$

Siden $a^2 - 2a = a(a-2)$, er determinanten null for $a = 0$ og $a = 2$.

b. Fra a. vet vi at likningssystemet har presis en løsning når a er forskjellig 0 og 2. Vi må undersøke disse verdiene spesielt. a=2 gir (på matriseform):

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje1 med linje1 -2linje3:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje1 med linje1+linje2 og får:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Likningssystemet har uendelig mange løsninger for $a = 2$. Tilfellet $a = 0$ har også uendelig mange løsninger. Her vet vi at vi vil får en rekke med bare nuller, siden siste søyle har bare nuller.

Derfor finnes det ingen verdi av a hvor likningsystemet har ingen løsning.

c. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

d. $(AB - BA)X = (AB - BA)^{-1}A$ gir $X = (AB - BA)^{-2}A$.

Siden inversen til $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ er $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ blir

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6

Renate Marie har nyttefunksjon $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{5}}$, hvor x er kilo pizza og y er kilo taco. Kiloprisen for pizza er 50 kroner, og kiloprisen for taco er a kroner. Hun handler for 280 kroner. Finn antall kilo pizza og taco hun kjøper (som funksjon av a).

Løsning:

Vi får lagrangefunksjonen:

$L = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{5}} - \lambda(50x + ay)$.

I. $L_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}} - \lambda 50 = 0$

II. $L_y = \frac{3}{5}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}} - \lambda a = 0$

Det gir:

I. $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}} = \lambda 50$

II. $\frac{3}{5}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}} = \lambda a$

I/II gir $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3}\frac{y}{x} = \frac{50}{a}$

Altså $y = \frac{90}{a}x$.

Vi setter inn i budsjettbetingelsen: $50x + ay = 280$ og får $50x + \frac{90}{a}ax = 280$. Det gir $140x = 280$. Altså $x = 2$ og $y = \frac{90}{a}x = \frac{90}{a} \cdot 2 = \frac{180}{a}$ Renate Marie kjøper 2 kilo pizza og $\frac{180}{a}$ kilo taco.