EKSAMENSOPPGAVE - Skoleeksamen

MET 11803
Matematikk

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	29.04.2015	Kl. 09.00
Innlevering:	29.04.2015	Kl. 14.00

Vekt:	70% av MET 1180
Antall sider i oppgaven:	7 inkl. forsiden
Antall vedleggsfiler:	0
Tillatte hjelpemidler	Eksamenskalkulator TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™ tillatt
Innføringsark:	Ruter

Maks. ant. vedleggsfiler til besvarelsen	0

Oppgave 1

Beregn følgende integraler

a. $\int_1^2 (\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x})dx$

b. $\int \frac{x^3+x+1}{x+1} dx$

c. $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}} e^{\sqrt{x^3+x}} dx$

d. $\int xe^{4x} dx$

e. Bestem arealet begrenset av grafen til $f(x) = \ln x$ og linjene $y = -1 =$ og $x = 2$.

Oppgave 2

La $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2$.

a. Finn stasjonære punkter.

b. Klassifiser punktene du fant i a.

c. La området D være gitt ved $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Finn globale maksimums- og minimumspunkter når h er definert på D. (Dette punktet teller dobbelt.)

d. La l være tangentlinja til nivåkurven $x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2 = 0$ i $(1, 1)$. Hvor skjærer tangentlinja l x-aksen?

Oppgave 3

a. Finn summen, $S(n)$, av de n første leddene til rekka $x - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{5^2} - \frac{x^4}{5^3} + \ldots$.

b. For hvilke x konvergerer rekka (m.a.o. at $\lim_{n\to\infty} S(n)$ eksisterer)? Bestem summen i dette tilfellet.

c. Finnes det en x slik at den uendelige summen er lik -8? Hvis ja, finn den tilhørende x-verdien. Hvis nei, begrunn hvorfor dette ikke er mulig.

Oppgave 4

En bedrift har kostnadsfunksjon $K(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

a. For hvilke x er grensekostnaden lik 1?

b. For hvilke x er grensekostnaden maksimal?

Oppgave 5

a. Regn ut determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

For hvilke verdier av a er determinanten null?

b. Betrakt likningsystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + x_3 &= a \\ ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + x_3 &= a \end{aligned}$$

For hvilke verdier av a har likningsystemet en entydig løsning? Finnes det verdier av a hvor likningssystemet har ingen løsning?

c. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Regn ut $AB - BA$.

d. Løs likningen $(AB - BA)X = (AB - BA)^{-1}A$.

Oppgave 6

Renate Marie har nyttefunksjon $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{5}}$, hvor x er kilo pizza og y er kilo taco. Kiloprisen for pizza er 50 kroner, og kiloprisen for taco er a kroner. Hun handler for 280 kroner. Finn antall kilo pizza og taco hun kjøper (som funksjon av a).

Rekker og finansmatematikk

Bankformel: Setter du inn et beløp A i banken med rente r per år, har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ hvor n er antall år.

Sum aritmetisk rekke: $S(n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{(n-1)d}{2})$.

Sum geometrisk rekke: $S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$

En geometrisk rekke med uendelig mange ledd er konvergent for $-1 < k < 1$, og summen er: $S = a_1 \frac{1}{1-k}$

Nåverdi av A om t tidsperioder: $\frac{A}{(1+r)^t}$

Kontinuerlig forrenting: $A_t = A_0 e^{rt}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling umiddelbart):

$S = A(r+1)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = \frac{A}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling umiddelbart): $S = \frac{A(1+r)}{r}$

Formel for terminbeløp ved annuitetslån: $A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Funksjonsanalyse for funksjoner i to variabler

Kandidater for (lokale) topp og bunn: $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

Test: $\Delta > 0, A > 0$ bunn, $\Delta > 0, A < 0$ topp, $\Delta < 0$ sadel.

($\Delta = AC - B^2$, hvor $A = f''_{xx}(x,y), B = f''_{xy}(x,y), C = f''_{yy}(x,y)$)

Totalderivert-formel: $z = f(x(t), y(t))$ gir $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Derivert til nivåkurve $f(x,y) =$ konstant: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

Lagrange funksjon: $L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$

Integrasjon

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$ (dersom $n \neq -1$)

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + K$ (dersom $n = -1$)

$\int e^x dx = e^x + K$

Delvis integrasjon: $\int u' \cdot v dx = (u \cdot v) - \int u \cdot v' dx$

Eksempel (Substitusjon): $\int e^{2x} dx$, $u = 2x$ gir $\int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{2x} + K$. ($\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$)

Eksempel (Delbrøk): $\int \frac{2}{x^2-1} dx$, skriv $\frac{2}{x^2-1}$ som $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ og finn A og B.

Lineær algebra

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Et lineært likningssystem bestående av n likninger med n ukjente:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$

Cramers regel:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) \quad$ (NB! $det(A) \neq 0$)

$adj(A) = kof(A)^t$.

$$kof(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & \cdots & (-1)^{n+1}A_{1n} \\ -A_{21} & A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2}A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}A_{n1} & (-1)^{n+2}A_{n2} & \cdots & (-1)^{2n+1}A_{nn} \end{bmatrix},$$

hvor A_{ij} er den determinanten som framkommer ved å stryke i'te rekke og j'te søyle i A.