Løsning	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	18. desember 2017 kl 1400 - 1900

Oppgave 1.

(a) Vi løser det lineære systemet for $a = 1$ ved Gauss-eliminasjon. Vi finner først den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Deretter finner vi en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har én løsning, og vi finner den ved baklengs substitusjon. Siste likning er $4z = 4$, som gir $z = 1$. Andre likning er $-4y + z = -4y + 1 = -3$, som gir $-4y = -4$ og $y = 1$. Første likning er $x + 7y + z = x + 8 = 9$, som gir $x = 1$. Dermed er løsningen $(x,y,z) = (1,1,1)$.

(b) Når $a = 1$, så er matrisen A og kofaktormatrisen C gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \\ 11 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Vi har at $\det(A) = 1(3-2) - 7(1+2) + 1(1+3) = -16$, og dermed er den inverse matrisen gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 11 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -11 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Løsningen av det lineære systemet ved bruk av den inverse matrisen er gitt ved

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -11 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at dette stemmer overens med svaret vi fikk i (a).

(c) Vi vet at systemet har eksakt én løsning hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$. Vi regner derfor ut $|A|$, og velger å utvikle $|A|$ langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & a \\ a & 3 & 2 \\ -a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-2) - 7(a+2a) + a(a+3a) = 4a^2 - 21a + 1$$

Dermed er $|A| = 0$ når $4a^2 - 21a + 1 = 0$, og dette gir løsningene

$$a = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4(4)}}{8} = \frac{21}{8} \pm \frac{5}{8}\sqrt{17}$$

og $|A| \neq 0$ for alle andre verdier av a. Altså har systemet eksakt én løsning for $a \neq a_1, a_2$ med

$$a_1 = \frac{21}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{17} \approx 5.20, \quad a_2 = \frac{21}{8} - \frac{5}{8}\sqrt{17} \approx 0.048$$

(d) For $a \neq a_1, a_2$ har vi én løsning (x,y,z), og y-koordinaten er følge Cramers regul gitt ved

$$y = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $\det(A) = 4a^2 - 21a + 1$. Vi regner ut determinanten $|A_2(\mathbf{b})|$:

$$|A_2(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & a \\ a & 6 & 2 \\ -a & a & 1 \end{vmatrix} = 1(6-2a) - 9(a+2a) + a(a^2+6a) = a^3 + 6a^2 - 29a + 6$$

Dermed får vi at

$$y = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} = \frac{a^3 + 6a^2 - 29a + 6}{4a^2 - 21a + 1}$$

Oppgave 2.

(a) Vi løser dette integralet ved å bruke potensregelen:

$$\int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 3x^{-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{-1}x^{-1} + \mathcal{C} = -\frac{3}{x} + \mathcal{C}$$

(b) Vi løser integralet ved å dele opp brøkuttrykket:

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1 + e^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{e^{-2x}}{-2}\right) + \mathcal{C} = \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + \mathcal{C}$$

(c) Vi løser integralet ved substitusjonen $u = \ln x$, som gir $\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x$ med $u' = 1/x$. Dette gir

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1/x} = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + \mathcal{C} = \frac{(\ln x)^2}{2} + \mathcal{C}$$

Oppgave 3.

(a) Vi har at f er definert for $x > 0$. Vi regner ut den deriverte, og får at

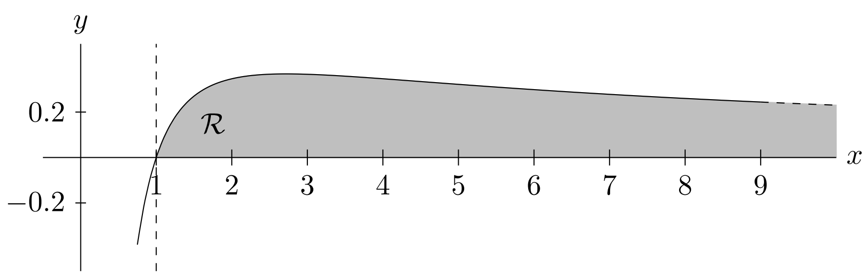
$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ når $\ln x = 1$, det vil si at $x = e$. Siden f er voksende for $x \leq e$ og f er avtagende for $x \geq e$, er $x = e$ et maksimumspunkt for f, med maksimumsverdi

$$f_{\text{maks}} = f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

Funksjonen har ikke noe minimumspunkt, siden $x = e$ er det eneste stasjonære punkt (og det er heller ikke andre kritiske punkt eller randpunkt). Derfor har f ingen minimumsverdi.

(b) Vi vet at funksjonen vokser i intervallet $(0,e]$, har et maksimum i $x = e$, og avtar i intervallet $[e, \infty)$. I $x = 1$ er verdien $f(1) = \ln 1/1 = 0$. Når $x \to \infty$, vil $f(x) \to 0$. En skisse av grafen til f og området R er vist nedenfor.



Arealet til området R er gitt ved

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Vi bruker det ubestemte integralet vi fant i Oppgave 2 (c) ovenfor, og får at

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^b = \frac{(\ln b)^2}{2}$$

og ser at det bestemte integralet går mot ∞ når $b \to \infty$. Arealet av området R er ikke endelig.

Oppgave 4.

(a) De første ordens deriverte blir

$$f'_x = 2xy^2 + y + 1, \quad f'_y = 2x^2y + x - 1$$

og de andre ordens partielderiverte for f blir

$$f''_{xx} = 2y^2, \quad f''_{xy} = 4xy + 1, \quad f''_{yy} = 2x^2$$

Hesse-matrisen $H(f)$ til f er dermed gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy+1 \\ 4xy+1 & 2x^2 \end{pmatrix}$$

(b) Nivåkurven $f(x,y) = 2$ har likning $x^2y^2 + xy + x - y = 2$. Vi finner skjæringspunktene med linjen $y = x$ ved å sette inn $y = x$ i likningen, og får da $x^4 + x^2 = 2$. Dette er en kvadratisk likning i $u = x^2$, og vi får

$$u^2 + u - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Dette gir $u = x^2 = 1$ eller $u = x^2 = -2$. Vi ser at kun $x^2 = 1$ er mulig, og det gir $x = \pm 1$ og $y = x$. Vi får dermed at

$$(a,a) = (1,1), \quad (b,b) = (-1,-1)$$

er de to skjæringspunktene.

(c) Vi har at stigningstallet til tangentlinjen for nivåkurven $f(x,y) = 2$ i et punkt (x,y) er gitt ved

$$y' = y'(x,y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2xy^2 + y + 1}{2x^2y + x - 1}$$

I punktet $(1,1)$ er derfor $y'(1,1) = -2$, og tangenten har likning

$$y - 1 = -2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 3$$

I punktet $(-1,-1)$ er $y'(-1,-1) = -1/2$, og tangenten har likning

$$y + 1 = -1/2(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

(d) Førsteordensbetingelsene er $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir likningene

$$2xy^2 + y + 1 = 0, \quad 2x^2y + x - 1 = 0$$

Vi kan skrive første likning som $y(2xy + 1) + 1 = 0$, og andre likning som $x(2xy + 1) - 1 = 0$. Løser vi begge likningene for $2xy + 1$, får vi

$$2xy + 1 = -1/y, \quad 2xy + 1 = 1/x$$

Dermed er $-1/y = 1/x$, eller $y = -x$. Vi sjekker $x = 0$ og $y = 0$ siden vi dividerer på x og y i regningen ovenfor. Men disse passer ikke i førsteordensbetingelsene, så $y = -x$ er eneste mulige løsning. Setter vi dette inn i første likning, får vi

$$2x^3 - x + 1 = 0$$

Ved innsetting ser vi at $x = -1$ er en løsning, og polynomdivisjon gir faktoriseringen

$$2x^3 - x + 1 = (x + 1)(2x^2 - 2x + 1) = 0$$

Siden $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ikke har noen løsninger, er $x = -1$ eneste løsning. Dette gir $y = 1$ og det stasjonære punktet

$$(x,y) = (-1,1)$$

For å klassifisere dette punktet, bruker vi annenderivert-testen. Hessematrisen $H(f)(-1,1)$ er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy+1 \\ 4xy+1 & 2x^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

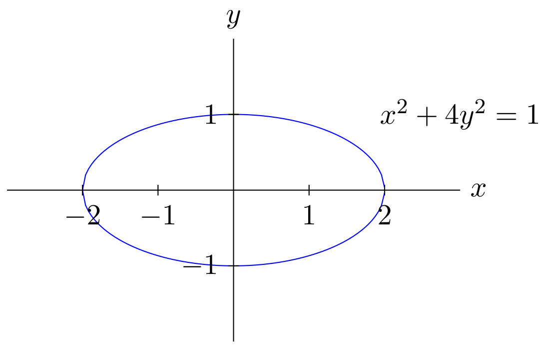
Siden determinanten til Hesse-matrisen er $4 - 9 = -5 < 0$, er punktet $(-1,1)$ et sadelpunkt.

Oppgave 5.

(a) Vi gjenkjenner likningen $x^2 + 4y^2 = 4$ som likningen til en ellipse med sentrum i $(x,y) = (0,0)$ og halvakser $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{1} = 1$, siden den kan skrives

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Ellipsen er begrenset, fordi alle punkter (x,y) på ellipsen tilfredsstiller $-2 \leq x \leq 2$ og $-1 \leq y \leq 1$. En skisse av ellipsen er vist nedenfor.



(b) Lagrange-problemet har Lagrange-funksjon

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = xy - \lambda(x^2 + 4y^2)$$

Lagrange-betingelsene er de to førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen, gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = y - \lambda \cdot 2x = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = x - \lambda \cdot 8y = 0$$
$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Førsteordensbetingelsene gir $y = 2\lambda x$ og $x = 8\lambda y = 8\lambda(2\lambda x) = 16\lambda^2 x$, og dermed

$$x - 16\lambda^2 x = x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

Vi ser at $x = 0$ eller $16\lambda^2 = 1$. Hvis $x = 0$, så er $y = 2\lambda x = 0$, og $(0,0)$ passer ikke i bibetingelsen $x^2 + 4y^2 = 4$. Dermed har vi at

$$\lambda^2 = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

Med $\lambda = 1/4$, får vi $y = x/2$, og innsatt i bibetingelsen gir dette

$$x^2 + 4y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

og da er $y = x/2 = \pm\sqrt{2}/2$. Dette gir to løsninger $(x,y;\lambda)$ av Lagrange-betingelsene, gitt ved

$$(x,y;\lambda) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; 1/4), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; 1/4)$$

Med $\lambda = -1/4$, får vi $y = -x/2$, og innsatt i bibetingelsen gir dette

$$x^2 + 4y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

og i dette tilfellet er $y = -x/2 = \mp\sqrt{2}/2$. Dette gir to løsninger $(x,y;\lambda)$ av Lagrange-betingelsene, gitt ved

$$(x,y;\lambda) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; -1/4), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; -1/4)$$

Totalt er det fire løsninger av Lagrange-betingelsene. Vi legger merke til at de to første har $f = xy = 1$, mens de to siste har $f = xy = -1$. Kun de to siste er kandidater for minimum.

(c) Siden mengden $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 4\}$ av tillatte punkter er ellipsen fra (a), så er den begrenset, og Lagrange-problemet har et minimum ved ekstremverdisetningen. De ordinære kandidatpunktene for minimum er punktene

$$(x,y;\lambda) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; -1/4), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; -1/4)$$

med $f = xy = -1$. Vi sjekker om det er noen punkter med degenerert bibetingelse: Det ville være punkter på ellipsen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 4$ med $g'_x = 2x = 0$ og $g'_y = 8y = 0$. Det eneste punktet som oppfyller dette er $(x,y) = (0,0)$, som ikke er på ellipsen. Vi har derfor ingen tillatte punkter med degenerert bibetingelse, og minimumsverdien er $f_{\text{min}} = -1$.

(d) Skriver vi bibetingelsen $g(x,y) = a$ for en konstant a, og kaller minimumsverdien til Lagrange-problemet min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$ for $f^*(a)$, så kan vi tolke Lagrange-multiplikatoren λ som den marginale endringen i minimumsverdi ved en liten endring i a, det vil si at

$$\lambda = \frac{df^*(a)}{da}$$

Når vi endrer verdien fra $a = 4$ til $a = 5$, får vi at

$$f^*(5) \approx f^*(4) + \Delta a \cdot \frac{df^*(a)}{da} = -1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} = -1.25$$

Vi estimerer altså at den nye minimumsverdien er $f^*(5) \approx -1.25$.