MET 1180 Matematikk	Matematikk for siviløkonomer
Løsning	Integrasjon

Oppgave 1.

$$\text{a)}\quad \int (x+1)^3 \ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$$

$$\text{b)}\quad \int \frac{x^3+2x-2}{x} \ \mathrm{d}x = \int x^2 + 2 - \frac{2}{x} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 2\ln|x| + C$$

$$\text{c)}\quad \int \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x = \int x^{-2} \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$$

$$\text{d)}\quad \int \sqrt{x} \ \mathrm{d}x = \int x^{1/2} \ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Oppgave 2.

a) Vi bruker substitusjonen $u = x^2 + 5x - 6$, som gir $\mathrm{d}u = (2x+5)\,\mathrm{d}x$. Dette gir

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-6} \ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{u} \ \mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x^2+5x-6| + C$$

b) Vi bruker delbrøksoppspaltningen

$$\frac{7}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad A(x-1) + B(x+6) = 7$$

Dette gir $A = -1$ og $B = 1$, og dermed

$$\int \frac{7}{x^2+5x-6} \ \mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x+6} + \frac{1}{x-1} \ \mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x+6| + C$$

c) Vi bruker polynomdivisjon og deretter delbrøksoppspaltning. Polynomdivisjon gir $7x - 35$ som kvotient med $7(31x-30)$ som rest, og restleddet har oppspaltningen

$$\frac{7(31x-30)}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad A(x-1) + B(x+6) = 7(31x-30)$$

Dette gir $A = 216$ og $B = 1$, og dermed

$$\int \frac{7x^3}{x^2+5x-6} \ \mathrm{d}x = \frac{7}{2}x^2 - 35x + 216\ln|x+6| + \ln|x-1| + C$$

Oppgave 3.

Vi løser integralene ved hjelp av delvis integrasjon:

$$\text{a)}\quad \int xe^x \ \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \ \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$

$$\text{b)}\quad \int x^2e^x \ \mathrm{d}x = x^2e^x - \int 2xe^x \ \mathrm{d}x = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\text{c)}\quad \int 9x^2 \ln x \ \mathrm{d}x = 3x^3 \ln x - \int 3x^2 \ \mathrm{d}x = 3x^3\ln x - x^3 + C$$

$$\text{d)}\quad \int 9\sqrt{x}\ln x \ \mathrm{d}x = 6x^{3/2}\ln x - \int 6x^{1/2} \ \mathrm{d}x = 6x\sqrt{x}\ln x - 4x\sqrt{x} + C$$

Oppgave 4.

Vi løser disse integralene ved hjelp av substitusjon:

$$a)\ \int \frac{e^x}{2-e^x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2-u}\ \mathrm{d}u = -\ln|2-u| + C = -\ln|2-e^x| + C$$

$$b)\ \int 2x^3 e^{x^2}\ \mathrm{d}x = \int x^2 e^u\ \mathrm{d}u = \int ue^u\ \mathrm{d}u = ue^u - e^u + C = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C$$

$$c)\ \int \frac{2}{e^x - e^{-x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2e^x}{(e^x)^2 - 1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2}{u^2-1}\ \mathrm{d}u = \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\ \mathrm{d}u$$
$$= \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = \ln|e^x - 1| - \ln|e^x+1| + C$$

$$d)\ \int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{x}e^u 2\sqrt{x}\ \mathrm{d}u = \int 2u^2 e^u\ \mathrm{d}u = 2u^2e^u - 4ue^u + 4e^u + C$$
$$= 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$$

Vi har brukt $u = e^x$ med $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$ i a) og c), $u = x^2$ med $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ i b) og $u = \sqrt{x}$ med $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$ i d).

Oppgave 5.

a) Det bestemte integralet blir

$$\int_2^b \frac{2x+5}{x^2+5x-6}\ \mathrm{d}x = \left[\ln|x^2+5x-6|\right]_2^b = \ln(b^2+5b-6) - \ln(8)$$

Dette går mot uendelig når $b \to \infty$, derfor eksisterer ikke integralet

$$\int_2^\infty \frac{2x+5}{x^2+5x-6}\ \mathrm{d}x$$

b) Det bestemte integralet blir

$$\int_2^b \frac{1}{x^2+5x-6}\ \mathrm{d}x = \int_2^b \frac{1/7}{x-1} - \frac{1/7}{x+6}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{7}\left[\ln|x-1| - \ln|x+6|\right]_2^b$$

Siden $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, gir dette

$$\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{b-1}{b+6}\right| - \ln(1/8)\right) \to -\frac{1}{7}\ln(1/8) = \frac{1}{7}\ln 8$$

når $b \to \infty$. Vi får dermed at integralet

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2+5x-6}\ \mathrm{d}x = \ln(8)/7 \cong 0{,}297$$

Oppgave 6.

(a) Skisse av området R er vist nedenfor. Siden $y = \ln x$ skjærer $y = 2$ i $x = e^2$, er arealet til R gitt ved

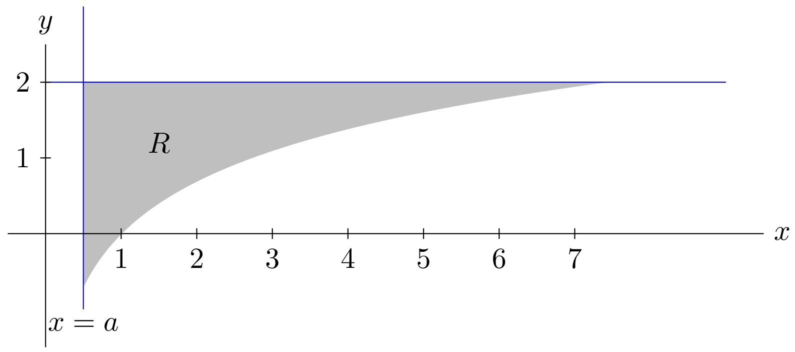
$$\int_a^{e^2} (2 - \ln x)\ \mathrm{d}x = [2x - (x\ln x - x)]_a^{e^2} = [3x - x\ln x]_a^{e^2}$$
$$= (3e^2 - 2e^2) - (3a - a\ln a) = e^2 - 3a + a\ln a$$

(b) Ved L'Hopitals regel er grenseverdien

$$\lim_{a\to 0^+} a\ln a = \lim_{a\to 0^+} \frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1/a}{-1/a^2} = \lim_{a\to 0^+}(-a) = 0$$

(c) Arealet til området begrenset av grafen til funksjonen f, den rette linjen $y = 2$ og y-aksen er

$$\lim_{a\to 0^+} e^2 - 3a + a\ln a = e^2 \cong 7.389$$



Oppgave 7.

Ved integrasjon finner vi at

$$C(x) = \int \left(2 + \frac{2x+7}{x^2+7x+1}\right)\,\mathrm{d}x = 2x + \ln(x^2+7x+1) + C$$

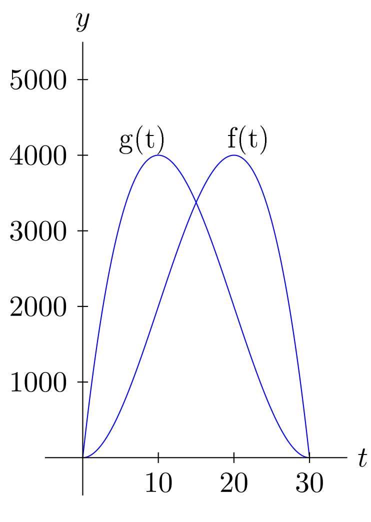
Siden $C(0) = 2\cdot 0 + \ln(1) + C = 100$, finner vi at $C = 100$. Dermed er

$$C(x) = 2x + 100 + \ln(x^2+7x+1)$$

Oppgave 8.

(a) Vi har at $f(t) = t^2(30-t)$ og $g(t) = t(t^2-60t+900) = t(t-30)^2$. Siden $t^2, 30-t \geq 0$ og $t, (t-30)^2 \geq 0$ for $0 \leq t \leq 30$, er $f(t), g(t) \geq 0$.

(b) Profilen f har maksimum for $t = 20$ siden $f'(t) = 60t - 3t^2 = 3t(20-t)$, og g har maksimum for $t = 10$ siden $g'(t) = 3t^2 - 120t + 900 = 3(t-10)(t-30)$. Maksimumsverdiene er $f(20) = 4000$ og $g(10) = 4000$. De to profilene er vist i skissen nedenfor.



(c) Den totale produksjonen ved bruk av profilen f er

$$\int_0^{30} 30t^2 - t^3\,\mathrm{d}t = \left[10t^3 - t^4/4\right]_0^{30} = 30^2(300-225) = 67.500$$

og den totale produksjonen ved bruk av profilen g er

$$\int_0^{30} t^3 - 60t^2 + 900t\,\mathrm{d}t = \left[t^4/4 - 20t^3 + 450t^2\right]_0^{30} = 67.500$$

(d) Siden begge profiler har samme totale produksjon, og størstedelen av produksjonen skjer senere med profilen f enn g, ser det ut til at f vil gi størst inntekt når oljeprisen er voksende. Ved profilen f blir inntekten

$$\begin{aligned}\int_0^{30} (25+t)(30t^2 - t^3)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{30} (750t^2 + 5t^3 - t^4)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[250t^3 + 5t^4/4 - t^5/5\right]_0^{30} = 2.902.500\end{aligned}$$

og ved profilen g blir inntekten

$$\begin{aligned}\int_0^{30} (25+t)(t^3 - 60t^2 + 900t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{30} (t^4 - 35t^3 - 600t^2 + 22500t)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[t^5/5 - 35t^4/4 - 200t^3 + 11250t^2\right]_0^{30} \\ &= 2.497.500\end{aligned}$$

Vi ser at samlet inntekt er størst ved bruk av profilen f, som forventet.