Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamen i: MET 22141 Matematikk valgfag

Dato: 02.06.2003 – kl. 09-14
Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3

Oppgave 1

Gitt differensialligningen $y'' - 3y' = 0$ (*)

a) Vis ved å bruke løsningene av den *karakteristiske* ligningen at (*) har løsningen

$$y = C_1 + C_2 e^{3x}$$

b) Ved å sette $z = y'$ i (*), får vi en 1.ordens homogen ligning. Løs ligningen på denne måten og vis at du får det samme svaret.

c) Benytt resultatet fra b) til å finne den generelle løsningen på

$$y'' - 3y' = e^{3x}$$

Oppgave 2

Gitt integralet $J(y) = \int_0^1 \left(3x^2 + y^2 + 4yy' + y'^2\right)dx$

Gjennom punktene $A(0,0)$ og $B(1,1)$ skal det legges en kurve $y = y(x)$ slik at integralet $J(y)$ blir minst mulig. Bestem $y(x)$.

Oppgave 3

Funksjonen $f(x, y)$ er gitt ved:

$$f(x, y) = \frac{2x + e^y}{e} \quad \text{dersom} \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$$

$f(x, y) = 0$ ellers.

a) Vis at $f(x,y)$ er en sannsynlighetstetthet.

To stokastiske variable X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet $f(x,y)$

b) Beregn $F(a,b)=\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dx\right)dy$.

Beregn $F(0.5,0.5)$. Hvordan vil du tolke dette svaret.

c) Vis at $f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\dfrac{2x+e-1}{e}$

Beregn $E(X)$

Oppgave 4

I en tenniskamp mellom to spillere a og b vinner den spilleren som først har vunnet to sett. La A være begivenheten at a vinner settet, og la B være begivenheten at b vinner settet. Sannsynligheten for at a vinner settet er $P(A)=0.6$, og sannsynligheten for at b vinner settet er $P(B)=0.4$

a) Hva er sannsynligheten for at b vinner de to første settene ?

b) Hva er sannsynligheten for at b vinner det første settet og a vinner sett nummer 2 og tre?

La X være antall sett som spilles inntil en spiller har vunnet kampen.

c) Beregn $P(X=2)$ og $P(X=3)$

d) Beregn $E(X)$ og $Var(X)$

e) Anta at $P(A)=p$ og $P(B)=1-p$.

For hvilke verdier av p er $E(X)=2.18$?

Oppgave 5

Minste Kvadraters Metode (MKM, OLS) går ut på å finne den vektoren **b** som minimerer summen av de kvadrerte elementene til $n \times 1$ vektoren **e** i ligningen

y = **Xb** + **e** ; hvor **y** er en $n \times 1$ vektor, **X** er en $n \times k$ matrise og **b** er en $k \times 1$ vektor.

La S = **e'e.** Vis blant annet ved å utføre derivasjonen $\frac{\partial S}{\partial b}$ at $b = (X'X)^{-1}X'y$.

Vanlig notasjon i statistikk er imidlertid $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$, men det er uten betydning her.

Oppgave 6

La $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 1.5 & 2 & 3.5 \\ 2.5 & 3.5 & 4.5 \end{bmatrix}$ og $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, beregn $\frac{\partial}{\partial x}(Ax)$ og $\frac{\partial}{\partial x}(x'Ax)$

Oppgave 7

Vis følgende når vi antar at matrisemultiplikasjon er mulig for matrisene A, B, C og D.

a) (AB)' = BA, hvis A og B er symmetriske matriser

b) (ABCD)' = D'C'B'A'

c) La $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $z = \begin{bmatrix} -13 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vis at x, y og z er lineært avhengige.

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamen i:	MET 22141 Matematikk valgfag
Dato:	07.06.2004 – kl. 09-14
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	4

Oppgave 1

a) Vis ved å derivere at $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 8) + C$

b) Bestem den fullstendige løsningen av differensialligningen

$$4y' + 2y = x^2 + 2$$

Oppgave 2

a) Bestem den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' + \frac{5}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0$$

b) Finn spesielt den løsningen som har en graf som går gjennom origo og som der har en tangent med stigningstallet 1.

Oppgave 3

Gitt funksjonen $F(t, p, \dot{p}) = e^{-t}\ln(4p - \dot{p})$

Løs problemet: maks $\int_0^1 F(t, p, \dot{p})dt \qquad p(0) = 1 \quad p(1) = 2e^3$

Oppgave 4

a) Anta at levetiden X for en komponent av type A har en sannsynlighetstetthet gitt ved:

$f(x) = 1 - 0.5x$ dersom $0 \le x \le 2$
$f(x) = 0$ ellers

Beregn $F(a) = P(X \le a)$

Hva er sannsynligheten for at komponenten har en levetid mindre eller lik 1 ?

Hva er den forventede levetiden , $E(X)$?

b) Fra to komponenter av type A lages en komponent av type B.
Komponent B virker dersom minst en av de av de to komponentene av type A virker.
Dersom ingen av de to komponentene av type A virker vil ikke komponent B virke.

Levetiden Y for komponent B vil derfor være maksimum av levetidene X_1 og X_2 for de to komponentene av type A. Regn med at X_1 og X_2 er uavhengige.

Hva er sannsynligheten for at begge komponentene av type A har en levetid mindre enn 1 ?

c) La $F_B(x) = P(Y \le x)$ være sannsynligheten for at en komponent av type B skal ha en levetid mindre eller lik x. Forklar hvorfor $F_B(x) = (x - 0.25x^2)^2$

d) Hva er sannsynlighetstettheten $f_B(x)$ for levetiden for komponent B ? Hva er den forventede levetiden for komponent B ?

e) Komponent C består også av to komponenter av type A. Komponent C virker hvis og bare hvis begge komponenter av type A virker. Hva er sannsynligheten for at komponent C skal ha en levetid mindre eller lik 1 ?

Oppgave 5

a) Det kan vises at

I(n) = $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 x^{n+1} + C$. Her er $n \ge 0$

(Du skal ikke vise dette)

Benytt formelen ovenfor til å beregne I(0), I(1) og I(2). Noe av dette vil du muligens få bruk for senere i oppgaven.

b) To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet

$f(x, y)$ er gitt ved:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{e-1}y \qquad \text{dersom} \quad 1 \le x \le e \quad \text{og} \quad 0 \le y \le 1$$

$f(x, y) = 0$ ellers.

Beregn $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ og $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

Oppgave 6

a) La $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ og $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, beregn $\frac{\partial}{\partial x}(Ax)$ og $\frac{\partial}{\partial x}(x'Ax)$

b) Avgjør om vektorene $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ er lineært uavhengige eller lineært avhengige. Begrunn svaret.

Oppgave 7

a) Bevis at $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) Bevis at dersom A og B er symmetriske så er $[(AB)']^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

c) Vis at hvis $X'X = X$, så er $X = X' = X^2$

d) La A være en symmetrisk matrise og anta at A^{-1} eksisterer. Bevis at da er også A^{-1} symmetrisk.

I følgende oppgave *kan* du om du ønsker det, bruke kalkulator til matrisemultiplikasjon

Oppgave 8

a) Du skal estimere $\alpha,\ \beta_1\ og\ \beta_2$ i regresjonsmodellen $y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

Til hjelp er følgende oppgitt: .

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \\ 70 \\ 67 \\ 59 \\ 33 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 13 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 301 \\ 1518 \\ 2233 \end{pmatrix} \qquad (X'X)^{-1} = \frac{1}{480}\begin{pmatrix} 790 & -80 & -42 \\ -80 & 16 & 0 \\ -42 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamen i: Met 22141 Matematikk valgfag
Dato: 03.06.05 – kl 09-14
Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider 4

Oppgave 1

a) Løs differensialligningen $y'' = y$ og finn spesielt den løsningskurven som går gjennom punktet $(0,1)$ og i dette punktet har en derivert som er lik null. Forklar hvordan du ved å betrakte differensialligningen kan si at dette punktet er et minimumspunkt.

b) Gitt differensialligningen: $y'' - y = e^{2x}$

Vis at $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$ er en løsning.

c) Løs variasjonsproblemet :

$$Min \int_0^{\ln 2} (y^2 + y'^2 + 2ye^{2x})dx, \quad y(0) = \frac{10}{3} \quad og \quad y(\ln 2) = \frac{13}{3}$$

Oppgave 2

En bedrift produserer et produkt som er lite holdbart. Dersom etterspørselen x er mindre enn produksjonen z må bedriften kaste det den ikke får solgt. Salgsprisen er 3 pr enhet, og produksjonskostnadene er 2 per enhet. Vi skal regne med at bedriften ikke har andre utgifter enn produksjonskostnadene .

a) Anta at etterspørselen, X etter en vare et uniformt fordelt i intervallet $[0,1]$
Det vil si sannsynlighetstettheten gitt ved $f(x) = 1$ dersom $0 \le x \le 1$
$f(x) = 0$ ellers

Anta at $0 \le z \le 1$
Da blir inntekten
$3z$ dersom $z \le x$
$3x$ dersom $x < z$

Den forventede inntekten er derfor $I(z) = \int_0^z 3x \cdot f(x)dx + \int_z^1 3z \cdot f(x)dx$

Kostnaden er $C(z) = 2z$

Den forventede fortjenesten vil derfor være en funksjon av z $0 \le z \le 1$

$$g(z) = I(z) - C(z) = \int_0^z 3x \cdot f(x)dx + 3z\int_z^1 f(x)dx - 2z$$

Hvor mye må bedriften produsere dersom den ønsker å maksimere den forventede fortjenesten? Hvor stor blir den maksimale forventede fortjenesten?

Vi skal heretter anta at etterspørselen er eksponentialfordelt med $\lambda = 1$

Det vil si sannsynlighetstettheten er gitt ved $f(x) = e^{-x}$ dersom $x \geq 0$

$f(x) = 0$ ellers

b) Beregn $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

c) Den forventede fortjenesten er nå

$$g(z) = \int_0^z 3x \cdot f(x)dx + 3z\int_z^{\infty} f(x)dx - 2z$$

Vis at $g(z) = -3e^{-z} - 2z + 3$

Hvor mye må bedriften produsere for å maksimere den forventede fortjenesten?

Oppgave 3

To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet

$f(x,y)$ er gitt ved:

$f(x,y) = 2\sqrt{x} \cdot y + 2xy^2$ dersom $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$

$f(x,y) = 0$ ellers

a) Beregn $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ Beregn $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx$

b) Beregn $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$ Beregn $Cov(X,Y)$

Opplysninger: $E(X) = 0.6222$ $E(Y) = 0.6944$

Oppgave 4

En noe beruset person kommer hjem fra et selskap og skal låse seg inn i huset. Han har 4 nøkler av likt utseende , men kun en passer til huset. Han trekker en av nøklene tilfeldig, passer ikke denne vil han velge en tilfeldig nøkkel blant de 3 andre. Passer heller ikke denne vil han velge en tilfeldig nøkkel blant de 2 han ikke har prøvd, osv.

La S_i stå for at personen har suksess i forsøk nr i (Det vil si at personen kommer inn i forsøk nr i)

La F_i stå for at personen har fiasko i forsøk nr i (Det vil si at personen **ikke** kommer inn i forsøk nr i)

La X være antall nøkler han må prøve før han kommer inn i huset.

a) Beregn $P(S_1)$, $P(F_1)$ og $P(S_2|F_1)$

Beregn $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$ og $P(X=4)$

b) Beregn E(X) og Var(X)

c) Vi skal nå tenke oss at personen er meget beruset slik at han ikke klarer å holde styr på hvilke nøkler har prøvd før. Hver gang han prøver trekker han derfor en tilfeldig nøkkel blant de 4.
Beregn $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=4)$, $P(X=5)$ og $P(X=6)$ Beregn generelt $P(X=x)$

Hva kalles denne fordelingen ? Beregn $\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x)$

Oppgave 5

Du skal estimere α og β i regresjonsmodellen $y=\alpha+\beta X+\varepsilon$

Til hjelp er følgende oppgitt

$$Y=\begin{pmatrix}3\\2\\6\\4\\7\\7\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}1 & 6\\1 & 4\\1 & 10\\1 & 7\\1 & 12\\1 & 15\end{pmatrix} \qquad (X'X)^{-1}=\frac{1}{504}\begin{pmatrix}570 & -54\\-54 & 6\end{pmatrix}$$

Oppgave 6

Avgjør om vektorene $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **og** $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

er lineært avhengige eller uavhengige.

Oppgave 7

La $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Beregn $|A|$ og $Tr(A)$

Finn egenverdiene til A, det vi si finn de verdiene av λ som er løsninger av likningen

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Hint: } \lambda = 2 \text{ er en av de tre løsningene})$$

Bruk disse egenverdiene til å beregne $|A|$ og $Tr(A)$.

Sammenlign de verdiene du fant med de verdiene du fikk når du beregnet $|A|$ og $Tr(A)$ direkte fra matrisen A

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: MET 22141 Matematikk valgfag

Eksamensdato: 12.06.06, kl. 09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle

Innføringsark: Ruteark

Totalt antall sider: 4

Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen
$$y'' - 5y' + 3y = 0$$
når $y(x)$ er to ganger kontinuerlig deriverbar.

b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen
$$y'' - ay' + (a-2)y = 0$$
når a er et vilkårlig tall og $y(x)$ er to ganger kontinuerlig deriverbar

c) La $F(x,y,y') = \left((y-y')^2 + y^2\right)\cdot e^{-5x}$. Finn $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ og $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)$

d) Vis at Eulerligningen tilordnet
$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \left((y-y')^2 + y^2\right)\cdot e^{-5x}\,dx$$

kan skrives på formen $\quad y'' - 5y' + 3y = 0$

e) Løs Eulerligningen tilordnet $J(y) = \int_0^2 \left((y-y')^2 + y^2\right)\cdot e^{-5x}\,dx$ med betingelsene $y(0) = 0$ og $y(2) = 1$

Oppgave 2

To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet $f(x,y)$ gitt ved:

$f(x,y)=\frac{1}{12}(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+x)$ dersom $0 \leq x \leq 4$ og $0 \leq y \leq 1$

$f(x,y)=0$ ellers.

a) Finn $f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

b) Vis at $f(x,y)$ er en sannsynlighetstetthet.

c) Beregn $E(XY)$

d) Beregn $P(X \leq 1)$

e) Opplysning: $Var(XY)=0.8803$ (Du skal ikke vise dette)
Benytt dette til å beregne $E((XY)^2)$

Oppgave 3

La $a=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&1&3\end{pmatrix}$ og $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

a) Beregn $\frac{\partial}{\partial x}(a'x)$ og $\frac{\partial}{\partial x}(x'Ax)$

b) Beregn $\frac{\partial}{\partial x}(a'x-x'Ax)$

c) Finn en vektor x slik at $\frac{\partial}{\partial x}(a'x-x'Ax)=0$

Oppgave 4

Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Beregn $|A|$. Finn egenverdiene til A (Hint: $\lambda = 2$ er en av de tre løsningene)

b) Opplysning : Egenverdiene til A^{-1} er $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ og $\lambda_3 = \frac{1}{6}$
(Du skal ikke vise dette)

Benytt opplysningene om egenverdiene til å beregne $|A^{-1}|$. Sammenlign med $|A|$ som du beregnet i punktet ovenfor og kommenter.

Oppgave 5

a) La M være en kvadratisk matrise. Vis at $M + M'$ er symmetrisk.

b) La A , B , X og Y være $n \times n$ matriser. Her er $|A| \neq 0$

i) Løs likningen $AX = B$ med hensyn på X

ii) Løs likningen $YA = B$ med hensyn på Y

iii) Det kan vises at dersom A er en symmetrisk $n \times n$ matrise der $|A| \neq 0$ så er A^{-1} symmetrisk (du skal ikke vise dette)

Vis at dersom A og B er symmetriske matriser så er $X' = Y$

Oppgave 6

Du bor i et område hvor sannsynligheten for et innbruddsforsøk i løpet av ett år er 0.04. Du vurderer å anskaffe en boligalarm og får følgende opplysninger. Dersom det blir innbruddsforsøk er sannsynligheten for at alarmen går lik 0.8. Dersom alarmen går er sannsynligheten for at tyven flykter 0.9.

La I stå for at boligen får innbruddforsøk, la A stå for at alarmen går og la F stå for at tyven flykter.

Opplysningene kan nå skrives: $P(I) = 0.04$ $P(A \mid I) = 0.8$ $P(F \mid A) = 0.9$

Anta at du anskaffer boligalarm.

a) Beregn $P(I \cap A)$. Det vil si beregn sannsynligheten for at det blir innbruddsforsøk og at alarmen går.

b) Beregn $P(A \cap F)$

c) Forklar med ord hva som menes med uttrykket $P(A \cap F \mid I)$
Beregn $P(A \cap F \mid I)$.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: **MET 22141 Matematikk valgfag**

Eksamensdato: 01.12.06, kl 09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle

Innføringsark: Ruter

Totalt antall sider: 4

Oppgave 1

a) Løs differensiallikningen $y' + 3x^2 y = 0$

b) Løs differensiallikningen $y' + 3x^2 y = x^2$

c) Løs differensiallikningen $y'' - y' - 2y = 0$

d) Vis at $g(x) = \frac{a_4}{a_3}$ er en løsning av differensiallikningen

$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = a_4$ (Her er a_1 a_2 a_3 og a_4 konstanter.)

La $y = f(x)$ være en løsning av differensiallikningen $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$

Vis at da vil $h(x) = f(x) + \frac{a_4}{a_3}$ være en løsning av differensiallikningen

$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = a_4$

e) Vis at Eulerligningen tilordnet

$$J(y) = \int_0^1 (3y'^2 - 4y' + 6y^2 + 5)e^{-x}dx$$

kan skrives på formen $3y'' - 3y' - 6y = -2$

Finn deretter den løsningen av Eulerligningen som tilfredstiller betingelsene

$y(0) = \frac{1}{3}$ $y(1) = \frac{4}{3}$

Oppgave 2

Vis at $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ er en sannsynlighetstetthet.

(Hint benytt substitusjonen $u = 1 + e^x$)

Beregn $F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

For hvilken verdi av b er $F(b) = \frac{3}{4}$

Oppgave 3

a) Deriver funksjonen $h(y) = y\ln y - y$

Vis at $\int \frac{\ln y}{y} dy = \frac{1}{2}(\ln y)^2 + C$

Noe av dette vil du muligens få behov for senere i oppgaven.

b) To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet gitt ved :

$f(x,y) = \frac{1}{2e-1}(\frac{x\ln y}{y} + x)$ dersom $0 \le x \le 2$ og $1 \le y \le e$

$f(x,y) = 0$ ellers

i) Beregn $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

ii) Beregn $E(X)$

iii) Beregn $E(Y)$

Oppgave 4

a) Dersom X og Y er to matriser slik at både XY og YX eksisterer da vil $Tr(XY) = Tr(YX)$ (du skal ikke vise dette)

La A og B være to $n \times n$ matriser.

Vis at : $Tr(ABA^{-1}) = Tr(B)$

b) La $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ Beregn $|A|$ og A^{-1} (Sett prøve)

c) La D være matrisen $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

Det kan vises at $E = ADA^{-1} = \begin{pmatrix}2a+1 & -2 & -2a+4\\ -2a & 3 & 2a\\ 2a & -2 & 5-2a\end{pmatrix}$

Du skal ikke vise dette.

i) Sett inn $a=0$ i matrisen E , og finn egenverdiene til matrisen

ii) Sett inn $a=1$ i matrisen E , og finn egenverdiene til matrisen

Benytt resultatene til å beregne $Tr(E)$ og determinanten til E, i det siste tilfellet (altså når $a=1$)

iii) Vis at den inverse til matrisen ADA^{-1} er $AD^{-1}A^{-1}$

Oppgave 5

La oss for enkelthetsskyld anta at et lag i en skiskytterstafett kun består av to løpere, som hver skyter fire skudd. Vi definerer følgende begivenheter:
A : Den første løperen treffer blinken. B : Den andre løperen treffer blinken.
Anta uavhengighet både innen hver løper og mellom løperne . La X være antall treff for den første løperen og Y være antall treff for den andre løperen.

a) Anta at $P(A)=0.8$ og $P(B)=0.8$
Hvilken fordeling har X?
Beregn $P(X=3)$, $E(X)$ og $Var(X)$
Hva er sannsynligheten for at laget til sammen treffer 8 blinker?
Det vil si: $P(X+Y=8)$
Hva er sannsynligheten for at laget til sammen treffer 7 blinker?
Det vil si: $P(X+Y=7)$
Beregn $E(X+Y)$ og $Var(X+Y)$

b) Anta nå at $P(A) = 0.7$ og $P(B) = 0.9$
Hva er nå sannsynligheten for at laget til sammen treffer 8 blinker?
Det vil si: $P(X + Y = 8)$
Hva er nå sannsynligheten for at laget til sammen treffer 7 blinker?
Det vil si: $P(X + Y = 7)$
Beregn $E(X + Y)$ og $Var(X + Y)$

Oppgave 6

a) Avgjør om vektorene $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

er lineært avhengige eller uavhengige.

b) Gitt tre vektorer $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $w = \begin{pmatrix} (a+1)^2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Vis at vektorene er lineært uavhengige for alle verdier av a

BI HANDELSHØYSKOLEN Institutt for samfunnsøknomi

Skriftlig eksamen i: MET 22141 Matematikk valgfag

Eksamensdato: 23.05.07, kl 09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle

Innføringsark: Ruteark

Totalt antall sider: 3

Oppgave 1

(a) Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Beregn $|A|$ Beregn $A^2 = AA$ Beregn $|AA|$. Ser du noen sammenhenger?

Finn egenverdiene til A. (Hint: $\lambda = 4$ er en egenverdi) Benytt egenverdiene til å beregne $|A|$

(b) Vis at dersom B er en symmetrisk matrise og D en matrise slik at DBD' kan beregnes da er DBD' en symmetrisk matrise.

(c) La E være en kvadratisk matrise. Vis at dersom $|E| < 0$ Så vil det **ikke** eksistere en kvadratisk matrise F slik at $F^2 = E$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $F(x, y, y') = 2xy - 2ay + 3yy' + xy'^2 - ay'^2$ Her er a en konstant.

(a) Vis at Eulerlikningen tilordnet

$$J(x) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

kan skrives på formen

$$(a - x)y'' - y' = a - x$$

(b) Anta $x > 0$. Løs Eulerlikningen når $a = 0$. Det vil si løs likningen

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 1$$

(Hint: Sett $y' = z$ slik at du får en førsteordens likning.)

(Husk at $e^{\ln x} = x$ og at $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}}$)

Oppgave 3

(a) Vis at $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)}dx = \ln(x^4 + 1) + C$

(b) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$y' + \frac{4x^3}{(x^4+1)}y = 0$$

Finn spesielt den løsningen som går gjennom punktet $(1, 5)$

Oppgave 4

En bil bruker ved jevn fart 8 liter bensin i timen. Bensintanken rommer 48 liter. Bensintanken har dessverre fått et lite hull hvor det lekker bensin når bilen kjører. Lekkasjen er proporsjonal med bensinmengden , V, som til enhver tid er på tanken. Vi starter kjøreturen med full tank.

(a) Forklar at bensinmengden som er igjen på tanken ved normal kjøring og uten hull i tanken kan uttrykkes ved $W = 48 - 8t$ hvor t er tiden målt i timer.

(b) Det kan vises at bensinforbruket per time (inklusive lekkasjen) kan uttrykkes ved differensialligningen $V' = \frac{dV}{dt} = -kV - 8$ (du skal ikke vise dette). Vis at dersom $V = 48$ når $t = 0$ og vi setter $k = 0.2$ vil løsningen på differensialligningen bli:

$$V(t) = 88e^{-0.2t} - 40$$

(c) Vil bilen klare en 5-timers tur på én tank?

Oppgave 5

To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet $f(x, y)$ gitt ved:
$f(x, y) = \frac{45}{37}(1 - (x^2 - y^2)^2) = \frac{45}{37}(1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4)$ dersom $0 \leq x \leq 1$ $\quad 0 \leq y \leq 1$
$f(x, y) = 0$ ellers.

(a) Finn $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

(b) Beregn $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx$

(c) Beregn $E(XY)$

(d) Opplysninger: $E(X) = E(Y) = 0.4865$ og $Var(X) = Var(Y) = 0.0761$.
(Du skal ikke vise dette).
Benytt opplysningene til å beregne korrelasjonskoeffisienten mellom X og Y.

Oppgave 6

Gitt annengradslikningen $x^2 + px + q = 0$. Anta at du kaster en vanlig terning to ganger. Du lar utfallet av det første kastet bestemme verdien for p, og utfallet av det andre kastet bestemme verdien for q. Både p og q vil derfor anta en av verdiene 1, 2, 3, 4, 5, 6. Annengradslikningen har løsningene

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

(a) Hva er sannsynligheten for at den første terningen faller på 5 og at den andre terningen faller på 4 ?
Hvilke løsninger har annengradslikningen i dette tilfellet ?

(b) Hva er sannsynligheten for at annengradslikningen som du lager på denne måten har eksakt **en** løsning?

Oppgave 7

To personer a og b skyter annenhver gang på en ballong. Den som først treffer ballongen har vunnet spillet. La A og B være begivenhetene at henholdsvis a og b treffer ballongen i et enkelt skudd. Anta at $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ og at a skyter først. Anta dessuten uavhengighet.

(a) Hva er sannsynligheten for at a bommer i et enkelt skudd? Det vil si beregn $P(A^c)$. Beregn $P(A^c \cap B)$. Hva er sannsynligheten for at det blir skutt tre ganger og at a vinner spillet? Hva er sannsynligheten for at det blir skutt fem ganger og at a vinner spillet? Hva er sannsynligheten for at det blir skutt en , tre eller fem ganger og at a vinner spillet?

(b) Hva er sannsynligheten for at a vinner spillet?

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	MET 22141 Matematikk valgfag
Eksamensdato:	23.05.08, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler tillatt.
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	2

Oppgave 1

(a) Finn den generelle løsningen av den separable differensiallikningen

$$e^{y+53}\dot{y} = 2t.$$

(b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$\dot{y} - 2ty = 23e^{t^2}$$

som tilfredstiller $y(0) = 3$.

(c) Finn løsningen av

$$\ddot{y} + 18\dot{y} - 403y = 0$$

som tilfredstiller $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 44$.

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i variasjonsproblemet

$$\min \int_0^1 ((12t + 24t^2)y + \dot{y}^2)dt, \quad y(0) = 1 \text{ og } y(1) = 0.$$

(a) Finn den generelle løsningen av Euler-likningen for dette problemet.

(b) Finn løsningen av likningen i (a) som tilfredstiller initialbetingelsene.

Oppgave 3

Anta at sannsynlighten for at du består førerprøven på første forsøk er $p = 0.75$. Hvis du ikke består, forsøker du på nytt, og da er også sannsynligheten for å bestå, $p = 0.75$. Anta at du ved hvert forsøk har sannsynlighet $p = 0.75$ for å bestå, og at du fortsetter helt til du har klart det.

(a) Hva er sannsynligheten for at du ikke behøver å kjøre opp mer enn 3 ganger?

(b) La X være antall forsøk du bruker for å bestå. Hva er sannsynligheten for at $2 \leq X \leq 6$?

Oppgave 4

Gå ut fra at en stokastisk variabel X har sannsynlighetstettbet gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{14}x(1+x) & \text{for} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Beregn $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ og $P(\{X \geq \frac{1}{2}\})$.
(b) Beregn $E[X]$.

Oppgave 5

Gå ut fra at X er en stokastisk variabel som kan være 0, 1, eller 2, og at Y er en stokastisk variabel som kan være -1 eller 1. Gå ut fra at

$$P(\{X=0, Y=-1\}) = 0.1$$
$$P(\{X=0, Y=1\}) = 0.1$$
$$P(\{X=1, Y=-1\}) = 0.02$$
$$P(\{X=1, Y=1\}) = 0.01$$

og anta $E[Y] = 0$.

(a) Finn $P(\{X=2, Y=-1\})$, $P(\{X=2, Y=1\})$, $P(\{X=3\})$ og $E[X]$.
(b) Finn $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$ og $\text{Cov}(X, Y)$.

Oppgave 6

Finn en verdi for h, slik at vektorene

$$\begin{pmatrix} 3 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er lineært avhenige.

Oppgave 7

Ta utgangspunkt i funksjonen:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 - 7x_2 + 6$$

(a) Skriv f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der A er en symmetrisk 2×2-matrise og B er en 1×2-matrise.
(b) Finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$. Vis at A er invertibel, og bruk dette til å vise at f har ett entydig stasjonært punkt. (Du trenger ikke å finne det stasjonære punktet.)

Oppgave 8

Gå ut fra at A og B er symmetriske $n \times n$-matrise. (At A og B er symmetriske, er det samme som å si at $A = A^T$ og $B = B^T$.) La $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$, og besvar oppgaven ut fra setninger i boka eller forelesningene. (Det er *ikke* nødvendig å oppgi nøyaktig referanse til setningene du bruker.)

(a) Vis at $A+B$ er symmetrisk og at $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$.
(b) Forklar ut fra definisjonen av en positivt definitt kvadratisk form, at hvis $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ er positivt definitte kvadratiske former, så er også den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x}$ positivt definitt. Vis at hvis både A og B bare har positive egenverdier, så har også $A+B$ bare positive egenverdier.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	MET 22141 Matematikk valgfag
Eksamensdato:	22.05.09, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler tillatt.
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	3

Oppgave 1

(a) Finn den generelle løsningen av den separable differensiallikningen

$$\dot{y} = 2ty^2.$$

(b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$\dot{y} - 4t^3y = t^3e^{t^4}$$

som tilfredstiller $y(0) = 1$.

(c) Finn løsningen av

$$\ddot{y} - 30\dot{y} + 225y = 450$$

som tilfredstiller $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 4$.

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i variasjonsproblemet

$$\max \int_0^2 (\ln \dot{y} + y)dt, \quad y(0) = 0 \text{ og } y(2) = \ln 2.$$

(a) Finn den generelle løsningen av Euler-likningen for dette problemet.

(b) Finn løsningen av likningen i (a) som tilfredstiller initialbetingelsene.

Oppgave 3

Et flyselskap opererer blant annet med et lite tomotors fly som kun tar 10 passasjerer. Flyselskapet har erfaring for at en person som har kjøpt bilett med sannsynlighet $p = 0.8$ vil møte fram til avgang.

(a) La n være antall billetter som selges og la X være antall passasjerer som møter fram til avgang. Hva kalles fordelingen til X ?

Anta at selskapet selger $n = 10$ biletter. Beregn $P(\{X = 10\})$ og $P(\{X = 9\})$.

(b) Det kan være fristende for selskapet og selge flere biletter enn det er plasser på flyet, og håpe at ikke alle møter opp. En flybilett koster 1000 kr. Dersom en passasjer møter opp og ikke får plass på flyet regner selskapet med og må ut med 3000 kr i erstatning til passasjeren.

La Y være summen av eventuelle erstatninger.

(i) Anta at selskapet selger 11 biletter. Beregn $E(Y)$.
(ii) Anta at selskapet selger 12 biletter. Beregn $E(Y)$.
(iii) Bør selskapet selge 10 , 11, 12 eller 13 biletter dersom det ønsker og maksimere forventingen til nettoinntekten, $Z = 1000n - Y$, der n er antall solgte biletter.

Tabell over deler av den binomiske fordelingen (når $p = 0.8$):

n \ x	11	12	13
11	0.085	0	0
12	0.206	0.068	0
13	0.268	0.178	0.054

(For eksempel hvis $n = 13$ så er $P(\{X = 12\}) \cong 0.178$)

Oppgave 4

To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet f gitt ved:
$f(x,y) = \frac{1}{48}(8 - 2x^2 - bxy - y^2)$ dersom $-1 \le x \le 1$ og $-2 \le y \le 2$. $f(x,y) = 0$ ellers.
Her er b en konstant $0 \le b \le 1$

(a) Finn $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
(b) Beregn $E(X^2)$
(c) Beregn kovariansen mellom X og Y uttrykt ved b.

Opplysninger: $E(X) = 0$ $E(Y) = 0$

Oppgave 5

Estimer β_0, β_1 og β_2 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$y_1 = 2, (x_{11}, x_{12}) = (0,1)$$
$$y_2 = 0, (x_{21}, x_{22}) = (-1,0)$$
$$y_3 = 1, (x_{31}, x_{32}) = (0,0)$$
$$y_4 = -1, (x_{41}, x_{42}) = (-2,1)$$

Du får oppgitt at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

Oppgave 6

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige. Kan vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

uttrykkes som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$? Begrunn svarene.

Oppgave 7

Ta utgangspunkt i funksjonen:

$$f(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + 8x_2 + 1$$

Skriv f på formen $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der A er en symmetrisk 2×2-matrise og B er en 1×2-matrise, og finn vektoren $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$. Finn egenverdiene til A og avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ er positiv definitt.

Oppgave 8

Gå nå ut fra at A er en 3×3-matrise, og at det finnes en invertibel matrise P slik at

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finn egenverdiene til A.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	MET 22141 Matematikk valgfag
Eksamensdato:	19.05.10, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	3

Oppgave 1

(a) Finn den generelle løsningen av den separable differensiallikningen

$$y\dot{y} = t.$$

(b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$t\dot{y} + y = e^t$$

som tilfredstiller $y(1) = e$.

(c) Finn løsningen av

$$\ddot{y} - 16\dot{y} + 64y = 1$$

som tilfredstiller $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 1$.

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i variasjonsproblemet

$$\max/\min \int_0^1 (y\dot{y} + e^y\dot{y} + e^{\dot{y}})dt, \quad y(0) = 0 \text{ og } y(1) = 1.$$

(a) Finn den generelle løsningen av Euler-likningen for dette problemet.
(b) Finn løsningen av likningen i (a) som tilfredstiller initialbetingelsene.

Oppgave 3

En person deltar tre søndager på rad i en konkuranse som gir en pengepremie på 8 000 kr dersom han vinner konkuransen. Konkuransen er krevende og han regner derfor med en sannsynlighet på kun $p = 0.15$ for å vinne en konkuranse. Du kan betrakte de tre konkuransene som uavhengige begivenheter.

La X være antall konkuranser som han vinner. La Y være total gevinst.

(a) Hvilken fordeling har X?
(b) Hva er sannsynligheten for at han vinner 2 av de tre konkuransene?
(c) Beregn $E(X)$ og $E(Y)$
(d) Beregn $Var(X)$ og $Var(Y)$
(e) Personen ønsker å øke sannsynligheten for å vinne konkuransene. Han bestemmer seg derfor å legge seg i hard trening fremover, og regner nå med følgende sannsynligheter.
- Sannsyligheten for å vinne konkuranse nr 1 er $p_1 = 0.2$
- Sannsyligheten for å vinne konkuranse nr 2 er $p_2 = 0.3$
- Sannsyligheten for å vinne konkuranse nr 3 er $p_3 = 0.4$

Beregn $P(X = 0)$ $P(X = 1)$ $P(X = 2)$ $P(X = 3)$

Beregn $E(X)$

Oppgave 4

En eksponensialfordelt stokastisk variabel har sannsynlighetstettheten

- $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ når $x \geq 0$
- $g(x) = 0$ ellers

dersom $\lambda = 1$ vil tettheten være $f(x) = e^{-x}$

Vis ved integrasjon at

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = 2$

La X være en stokastisk variabel som har $f(x)$ til tetthet.

Beregn $Var(X)$

Oppgave 5

To stokastiske variable X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet gitt ved

- $f(x,y) = \frac{1}{2}(xe^{-x}e^{-y} + ye^{-x}e^{-y})$ når $x \geq 0$ $y \geq 0$
  $f(x,y) = 0$ ellers

Her kan du med stor fordel benytte deg av oppgave 4.
(Du får også oppgitt at $\int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx = 6$)

(a) Beregn $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
(b) Beregn $E(X)$
(c) Beregn $Var(X)$
(d) Beregn $E(XY)$
(e) Beregn $Cov(X,Y)$ (Opplysning $E(X) = E(Y)$)

Oppgave 6

Estimer $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ og β_3 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \epsilon$ ut fra observasjonene

$$y_1 = 2, (x_{11}, x_{12}, x_{13}) = (0,1,1)$$
$$y_2 = 0, (x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (-1,0,2)$$
$$y_3 = 1, (x_{31}, x_{32}, x_{33}) = (0,0,-1)$$
$$y_4 = 2, (x_{41}, x_{42}, x_{43}) = (1,0,-1)$$

Du får oppgitt at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Oppgave 7

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Oppgave 8

Ta utgangspunkt i funksjonen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1$$

Skriv f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der A er en symmetrisk 3×3-matrise og B er en 1×3-matrise, og finn vektoren $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$. Finn egenverdiene til A og avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv definitt.

HANDELSHØYSKOLEN BI

Institutt for Samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	**MET 22141 Matematikk valgfag**
Dato:	16.06.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	2

Oppgave 1.

Vi betrakter vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og matrisen T gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

(a) For hvilke verdier av h er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige?
(b) Er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige når $h = 2$?

Oppgave 2.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi for A, og finn de andre egenverdiene til A.
(b) Regn ut den symmetriske matrisen $B = A^T A$. Vis at B er invertibel, og regn ut B^{-1}.
(c) Finn alle stasjonære punkter til funksjonen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 & 26 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 7$.
(d) Vis at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ er en positiv definit kvadratisk form uten å regne ut egenverdiene til B.

Oppgave 3.

Løs følgende initialverdiproblemer:

(a) $y'' + 3y' - 28y = 14$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.
(b) $y' + 2e^t y = e^t$, $y(0) = 1$.
(c) $ty' = 1 + t + y + ty$, $y(1) = 1$.

OPPGAVE 4.

Vi ønsker å plante trær for å dekke et område på 30 kvadratkilometer i løpet av 4 år. La $y(t)$ være antall kvadratkilometer som er dekket etter t år, og la $\dot{y}(t)$ være plantehastigheten, målt i kvadratkilometer per år. Vi antar at kostnadsraten, målt i kr per år, er $C(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2$, der K er en positiv konstant. Den totale neddiskonterte kostnaden er da

$$\int_0^4 C(t, y, \dot{y})e^{-rt}\, dt$$

der r er diskonteringsrenten.

(a) Vi ønsker å minimere den totale neddiskonterte kostnaden. Sett opp variasjonsproblemet dette leder til. Vil en løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene til variasjonsproblemet minimere den totale neddiskonterte kostnaden?

(b) Løs variasjonsproblemet. Hva blir den totale neddiskonterte kostnaden om diskonteringsrenten $r = 0.08$ og konstanten $K = 10.000$?

OPPGAVE 5.

La X være antall mål til hjemmelaget og Y være antall mål til bortelaget i løpet av en fotballkamp. Vi antar at X og Y er uavhengige stokastiske variable, at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_X = 2$, og at Y er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Y = 1$.

(a) Finn $P(X = x, Y = y)$, og regn ut sannsynligheten for hvert av resultatene 0-0, 1-0 og 2-1.

(b) Regn ut sannsynligheten $P(X = Y, X \leq 4)$. Gi en tolkning av denne sannsynligheten.

(c) Regn ut den betingede sannsynligheten $P(X = Y | X \leq 4)$.

(d) Finn sannsynligheten $P(X + Y \geq 2)$. Du vil tilby et veddemål der spilleren vinner d ganger innsatsen hvis det blir minst 2 mål, og taper innsatsen om det blir færre enn 2 mål. Hvor stor bør d være om veddemålet skal lønne seg for deg?

OPPGAVE 6.

La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy(x^2 + y^2) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Finn $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$, og sjekk at $f(x, y)$ er en sannsynlighetstetthet.

(b) Regn ut $E[X]$ og $\text{Var}[X]$.

(c) Vis at $E[Y^n] = E[X^n]$ for $n \geq 1$, og bruk dette til å finne $E[Y]$ og $\text{Var}[Y]$.

(d) Regn ut $E[XY]$ og $\text{Cov}(X, Y)$.

(e) Regn ut $P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2)$.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	**ELE 37191 Matematikk valgfag**
Eksamensdato:	16.06.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	2

OPPGAVE 1.

Vi betrakter vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og matrisen T gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

(a) For hvilke verdier av h er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige?
(b) Er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige når $h = 2$?

OPPGAVE 2.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi for A, og finn alle egenvektorer for A med egenverdi $\lambda = 3$.
(b) Regn ut den symmetriske matrisen $B = A^T A$. Vis at B er invertibel, og regn ut B^{-1}.
(c) Finn alle stasjonære punkter til funksjonen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 & 26 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 7$.
(d) Vis at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ er en positiv definit kvadratisk form uten å regne ut egenverdiene til B.

OPPGAVE 3.

Løs følgende initialverdiproblemer:

(a) $y'' + 3y' - 28y = 14,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$
(b) $y' + 2e^t y = e^t,\ y(0) = 1.$
(c) $ty' = 1 + t + y + ty,\ y(1) = 1.$

Oppgave 4.

Vi ønsker å plante trær for å dekke et område på 30 kvadratkilometer i løpet av 4 år. La $y(t)$ være antall kvadratkilometer som er dekket etter t år, og la $\dot{y}(t)$ være plantehastigheten, målt i kvadratkilometer per år. Vi antar at kostnadsraten, målt i kr per år, er $C(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2$, der K er en positiv konstant. Den totale neddiskonterte kostnaden er da

$$\int_0^4 C(t, y, \dot{y})e^{-rt}\,dt$$

der r er diskonteringsrenten.

(a) Vi ønsker å minimere den totale neddiskonterte kostnaden. Sett opp variasjonsproblemet dette leder til. Vil en løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene til variasjonsproblemet minimere den totale neddiskonterte kostnaden?

(b) Løs variasjonsproblemet. Hva blir den totale neddiskonterte kostnaden om diskonteringsrenten $r = 0.08$ og konstanten $K = 10.000$?

Oppgave 5.

La X være antall mål til hjemmelaget og Y være antall mål til bortelaget i løpet av en fotballkamp. Vi antar at X og Y er uavhengige stokastiske variable, at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_X = 2$, og at Y er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Y = 1$.

(a) Finn $P(X = x, Y = y)$, og regn ut sannsynligheten for hvert av resultatene 0-0, 1-0 og 2-1.

(b) Regn ut sannsynligheten $P(X = Y, X \leq 4)$. Gi en tolkning av denne sannsynligheten.

(c) Regn ut den betingede sannsynligheten $P(X = Y | X \leq 4)$.

(d) Finn sannsynligheten $P(X + Y \geq 2)$. Du vil tilby et veddemål der spilleren vinner d ganger innsatsen hvis det blir minst 2 mål, og taper innsatsen om det blir færre enn 2 mål. Hvor stor bør d være om veddemålet skal lønne seg for deg?

Oppgave 6.

La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy(x^2 + y^2) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Finn $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$, og sjekk at $f(x, y)$ er en sannsynlighetstetthet.

(b) Regn ut $E[X]$ og $\text{Var}[X]$.

(c) Vis at $E[Y^n] = E[X^n]$ for $n \geq 1$, og bruk dette til å finne $E[Y]$ og $\text{Var}[Y]$.

(d) Regn ut $E[XY]$ og $\text{Cov}(X, Y)$.

(e) Regn ut $P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2)$.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi
Kontinuasjon

Skriftlig eksamen i:	**ELE 37191 Matematikk valgfag**
Eksamensdato:	28.11.2011, 14:00 – 19:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	2

Oppgave 1.

Anta at X og Y er simultant fordelte diskrete stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$\begin{array}{lll} P(X=1,Y=1)=0.20 & P(X=1,Y=2)=0.20 & P(X=1,Y=3)=0.20 \\ P(X=2,Y=1)=0.25 & P(X=2,Y=2)=0.10 & P(X=2,Y=3)=0.05 \end{array}$$

(a) Regn ut $P(X<Y)$.
(b) Finn forventning og varians for Y.
(c) Finn $\text{Cov}(X,Y)$. Er X og Y uavhengige?

Oppgave 2.

La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y)=\begin{cases} k(x^2-2xy+y^2) & 0\le x\le 1 \text{ og } 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant $k>0$.

(a) Finn $f_X(x)$ når $0\le x\le 1$, og bruk dette til å bestemme k.
(b) Finn $F(a,b)=P(X\le a, Y\le b)$ når $0\le a\le 1$ og $0\le b\le 1$.
(c) Regn ut $E[X]$ og $\text{Var}[X]$.
(d) Regn ut $E[XY]$ og $\text{Cov}(X,Y)$.
(e) Regn ut $P(X\ge 1/2, Y\le 1/2)$.

Oppgave 3.

Vi betrakter vektorene $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ gitt ved

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_4=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$$

(a) Er vektorene $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ lineært uavhengige? Begrunn svaret.
(b) Finn tre lineært uavhengige vektorer blant vektorene $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$.

OPPGAVE 4.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Vis at $\lambda = 2$ er en egenverdi for A.
(b) Finn alle egenverdiene til A. Bruk dette til å finne $\det(A)$.

OPPGAVE 5.

Finn den generelle løsningen til følgende differensiallikninger:

(a) $y'' + 8y' + 16y = 32$
(b) $t^2y' + 2ty = te^{-t}$

OPPGAVE 6.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\min \int_0^{25} (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}\,dt \quad \text{når} \quad y(0) = 1,\ y(25) = e^4$$

(a) Vis at Euler-likningen for variasjonsproblemet kan skrives på formen $\ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$.
(b) Løs variasjonsproblemet. Hva er den minimale verdien av integralet?

Sensorveiledning i MET 2214 gitt 02.06.03

Oppgave 1

$y'' - 3y' = 0$

a) Den *karakteristiske* ligningen er $r^2 - 3r = r(r-3) = 0$
Denne har løsningene $r_1 = 0$ og $r_2 = 3$
Løsningen er derfor $y = C_1 e^{0\,x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$

b) Ved å sette $z = y'$,får vi $z' - 3z = 0$ $\frac{dz}{dx} = 3z$

$$\frac{dz}{z} = 3dx \qquad \int \frac{dz}{z} = \int 3dx \qquad \ln|z| = 3x + C^* \qquad z = Ce^{3x}$$

$$y = \int Ce^{3x}dx = \frac{c}{3}e^{3x} + C_1 = C_1 + C_2 e^{3x}$$

c) La oss først løse likningen $z' - 3z = e^{3x}$

Setter vi $z = uv$ får vi $z' = u'v + uv'$ setter vi dette inn i likningen får vi:

$$u'v + uv' - 3uv = e^{3x} \qquad (u' - 3u)v + uv' = e^{3x}$$

Setter vi inn $u = e^{3x}$ får vi likningen $e^{3x}v' = e^{3x}$ $v' = 1$ $v = x + C$
Dermed blir $z = e^{3x}(x + C)$

$$y = \int (x+C)e^{3x}dx = (x+C)\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx = (x+C)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C_2 =$$

$$\frac{1}{3}xe^{3x} + C_1 e^{3x} + C_2$$

Oppgave 2

$$J(y) = \int_0^1 \left(3x^2 + y^2 + 4yy' + y'^2\right)dx$$

$$F(x, y, y') = 3x^2 + y^2 + 4yy' + y'^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4y' \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y + 2y' \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx}(4y + 2y') = 4y' + 2y''$$

Eulerlikningen blir da $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y + 4y' - 4y' - 2y'' = 2y - 2y'' = 0$

$y''-y=0$
Dette gir den karakteristiske likningen $r^2-1=0$ som har løsningene

$r=-1$ og $r=1$ Dette gir

$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ Skal kurven gå gjennom punktene $A(0,0)$ og $B(1,1)$

må $C_1+C_2=0$ og $eC_1+e^{-1}C_2=1$ Ganger vi den siste likningen med e og setter inn $C_2=-C_1$ får vi:

$$e^2C_1-C_1=e \qquad (e^2-1)C_1=e \qquad C_1=\frac{e}{e^2-1} \qquad C_2=-\frac{e}{e^2-1}$$

$$y=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})$$

Oppgave 3

$$f(x,y)=\frac{2x+e^y}{e} \text{ dersom } \quad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1 \quad f(x,y)=0 \text{ ellers.}$$

a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{2x+e^y}{e}dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{x^2+e^yx}{e}\right]_0^1dy=$$

$$\int_0^1\frac{1+e^y}{e}dy=\left[\frac{y+e^y}{e}\right]_0^1=\frac{1+e-1}{e}=1$$

b) $$F(a,b)=\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{a}f(x,y)dx\right)dy=\int_0^b\left(\int_0^a\frac{2x+e^y}{e}dx\right)dy=\int_0^b\left[\frac{x^2+e^yx}{e}\right]_0^a dy=$$

$$\int_0^b\left(\frac{a^2+ae^y}{e}\right)dy=\left[\frac{a^2y+ae^y}{e}\right]_0^b=\frac{a^2b+ae^b-a}{e}$$

$$F(0.5,0.5)=\frac{0.5^2\cdot 0.5+0.5\cdot e^{0.5}-0.5}{e}=0.1653$$

Sannsynligheten for at både X og Y samtidig skal anta verdier mindre eller lik

0.5 er 0.1653. Det vil si $P(X\le 0.5, Y\le 0.5)=0.1653$

c) $f_x(x) = \int_0^1 \frac{2x+e^y}{e}dy = \left[\frac{2xy+e^y}{e}\right]_0^1 = \frac{2x+e-1}{e}$

$$E(X) = \int_0^1 x f_x(x)dx = \int_0^1 x\frac{2x+e-1}{e}dx = \int_0^1 \frac{2x^2+(e-1)x}{e}dx = \left[\frac{\frac{2x^3}{3}+(e-1)\frac{x^2}{2}}{e}\right]_0^1 =$$

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{e-1}{2}}{e} = \frac{4+3e-3}{6e} = \frac{3e+1}{6e} \approx 0.5613$$

Oppgave 4

a) Da vi har uavhengighet er sannsynligheten for at b vinner de to første settene $P(BB) = P(B)P(B) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$

b) Da vi har uavhengighet er sannsynligheten for at b vinner det første settet a vinner sett nr to og tre

$$P(BAA) = P(B)P(A)P(A) = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.144$$

c) Skal $X = 2$ må enten a vinne de to første settene eller b vinne de to første settene. Vi får derfor $P(X = 2) = P(AA) + P(BB) = 0.6 \cdot 0.6 + 0.4 + 0.4 = 0.52$
Da $P(X=2)+P(X=3)=1$ vil $P(X=3) = 1-P(X=2) = 1-0.52 = 0.48$

d) $\mu = E(X) = 2 \cdot 0.52 + 3 \cdot 0.48 = 2.48$
$E(X^2) = 2^2 \cdot 0.52 + 3^2 \cdot 0.48 = 6.4$
$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 6.4 - (2.48)^2 = 0.2496$

e) Nå er
$P(X=2) = P(AA)+P(BB) = p^2 + (1-p)^2 = p^2 + 1 - 2p + p^2 = 2p^2 - 2p + 1$
$P(X=3) = 1 - P(X=2) = 2p - 2p^2$
$E(X) = 2(2p^2 - 2p + 1) + 3(2p - 2p^2) = -2p^2 + 2p + 2$
Skal $E(X) = 2.18$ må $-2p^2 + 2p + 2 = 2.18$
$-2p^2 + 2p - 0.18 = 0$ $\quad p = 0.1$ eller $p = 0.9$

Jeg setter opp to regneregler som kan benyttes i oppgavene nedenfor:

Dersom A er en matrise og x en vektor så er

1) $\dfrac{\partial(Ax)}{\partial x} = A'$

2) Dersom A er en kvadratisk matrise så er $\dfrac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = (A + A')x$.

Er spesielt A symmetrisk så er $\dfrac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = 2Ax$

Oppgave 5

$y = Xb + e$ Fra dette får vi $e = y - Xb$

$S = e'e = (y - Xb)'(y - Xb) = (y' - b'X')(y - Xb) = y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb =$

$y'y - 2y'Xb + b'X'Xb$

Benytter vi regnereglene 1) og 2) får vi

$\dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 - (2y'X)' + 2X'Xb = -2X'y + 2X'Xb$ Skal $\dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ må $X'Xb = X'y$

Herav følger $b = (X'X)^{-1}X'y$

Oppgave 6

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 1.5 & 2 & 3.5 \\ 2.5 & 3.5 & 4.5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Benytter vi oss av regneregelen 1) får vi $\dfrac{\partial}{\partial x}(Ax) = A' = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 1.5 & 2 & 3.5 \\ 2.5 & 3.5 & 4.5 \end{bmatrix}$

Benytter vi oss av regneregelen 2) får vi $\dfrac{\partial}{\partial x}(x'Ax) = 2Ax = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$

Oppgave 7

a) Hvis A og B er symmetriske matriser så er $(AB)' = B'A' = BA$,

b) $(ABCD)' = ((AB)(CD))' = (CD)'(AB)' = (D'C')(B'A') = D'C'B'A'$

c) La $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $z = \begin{bmatrix} -13 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Da $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 - 52 + 2 + 4 + 39 = 0$

så er x, y og z er lineært avhengige

Sensorveiledning i Met2214 gitt 07.06.04

Oppgave 1

a) $$F(x) = 2e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 8) + C$$

$$F'(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 8) + 2e^{\frac{x}{2}}(2x - 4) =$$

$$e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 8 + 4x - 8) = e^{\frac{x}{2}}(x^2) = x^2 e^{\frac{x}{2}}$$

b) Løser først den homogene likningen

$$4u' + 2u = 0 \qquad 2u' + u = 0 \qquad 2u' = -u \qquad u' = -\frac{1}{2}u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{2}dx \qquad \ln|u| = -\frac{1}{2}x + C^* \qquad u = e^{-\frac{1}{2}x + C^*} = ce^{-\frac{1}{2}x}$$

Søker en løsning på formen $y = uv$

$$4y' + 2y = x^2 + 2 \qquad 4(u'v + uv') + 2uv = x^2 + 2$$

$4u'v + 4uv' + 2uv = x^2 + 2$ Lar vi $u = e^{-\frac{1}{2}x}$ får vi

$$4e^{-\frac{1}{2}x}v' = x^2 + 2 \qquad v' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 2) = \frac{1}{4}x^2 e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$v = \frac{1}{4}\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int e^{\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{4} \cdot 2e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 8) + \frac{1}{2} \cdot 2e^{\frac{x}{2}} + C =$$

$$\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 10) + C$$

Løsningen på differensiallikningen er derfor:

$$y = uv = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 10) + C\right) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 10) + Ce^{-\frac{x}{2}}$$

Oppgave 2

a) $$y'' + \frac{5}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0$$

Den karakteristiske likningen er :

$r^2 + \frac{5}{2}r - \frac{3}{2} = 0$ denne likningen har løsningene $r = \frac{1}{2}$ og $r = -3$

$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-3x}$ Skal denne gå gjennom origo må

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$ Det vil si $C_2 = -C_1$

$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} - C_1 e^{-3x}$ $y' = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} - C_1 e^{-3x}(-3) = C_1(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 3e^{-3x})$

$y'(0) = C_1(\frac{1}{2} + 3) = \frac{7}{2}C_1 = 1$ Av dette følger at $C_1 = \frac{2}{7}$ $C_2 = -\frac{2}{7}$

$y = \frac{2}{7}(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-3x})$

Oppgave 3

$F(t, p, \dot{p}) = e^{-t}\ln(4p - \dot{p})$ $\frac{\partial F}{\partial p} = e^{-t}\frac{1}{4p - \dot{p}} \cdot 4$ $\frac{\partial F}{\partial \dot{p}} = e^{-t}\frac{1}{4p - \dot{p}}(-1) = \frac{-e^{-t}}{4p - \dot{p}}$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}}) = \frac{-e^{-t}(-1)(4p - \dot{p}) + e^{-t}(4\dot{p} - \ddot{p})}{(4p - \dot{p})^2} = \frac{e^{-t}(4p - \dot{p} + 4\dot{p} - \ddot{p})}{(4p - \dot{p})^2}$

Eulers likning. $\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{p}}$

$\frac{4e^{-t}}{4p - \dot{p}} - \frac{(-\ddot{p} + 3\dot{p} + 4p)e^{-t}}{(4p - \dot{p})^2} = 0$ ganger vi denne likningen med $(4p - \dot{p})^2$ får vi:

$4e^{-t}(4p - \dot{p}) - (-\ddot{p} + 3\dot{p} + 4p)e^{-t} = 0$
Herav følger $16p - 4\dot{p} + \ddot{p} - 3\dot{p} - 4p = 0$ $\ddot{p} - 7\dot{p} + 12p = 0$
Den karakteristiske likningen blir:

$r^2 - 7x + 12 = 0$ Denne har løsningene $r = 3$ og $r = 4$

Løsningen er på formen $p(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$

Skal den gå gjennom punktet $(0,1)$ må $p(0) = C_1 + C_2 = 1$

Skal den gå gjennom punktet $(1, 2e^3)$ må $p(1) = C_1 e^3 + C_2 e^4 = 3e^3$
Det vil si $C_1 + eC_2 = 3$ Herav følger $(e-1)C_2 = 2$ $C_2 = \frac{2}{e-1}$

$C_1 = 1 - C_2 = 1 - \frac{2}{e-1} = \frac{e-3}{e-1}$ $p(t) = \frac{e-3}{e-1}e^{3t} + \frac{2}{e-1}e^{4t}$

Oppgave 4

a) $$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}(1-0.5x)dx = \left[x - 0.5\frac{x^2}{2}\right]_0^a = a - 0.25a^2$$

Hva er sannsynligheten for at komponenten har en levetid mindre eller lik 1

$F(1) = 1 - 0.25 \cdot 1^2 = 0.75$

Forventede levetid $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{2} x \cdot (1-0.5x)dx = \int_{0}^{2}(x - 0.5x^2)dx =$

$$\left[\frac{x^2}{2} - 0.5\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 - 0.5 \cdot \frac{8}{3} = 0.6667$$

b) Sannsynligheten for at begge komponentene av type A har en levetid mindre enn 1 er $F(1) * F(1) = 0.75^2 = 0.5625$

c) Skal komponent B skal ha en levetid mindre eller lik x må begge komponentene av type A ha en levetid på mindre eller lik x.

$F_B(x) = P(X \le x) \cdot P(X \le x) = F(x) \cdot F(x) = (x - 0.25x^2)^2$

d)

$$f_B(x) = F_B'(x) = 2(x - 0.25x^2)(1-0.5x) = (2x - 0.5x^2)(1-0.5x) = 0.25x^3 - 1.5x^2 + 2x$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_B(x)dx = \int_{0}^{2} x(0.25x^3 - 1.5x^2 + 2x)dx = \int_{0}^{2}(0.25x^4 - 1.5x^3 + 2x^2)dx =$$

$$\left[0.25\frac{x^5}{5} - 1.5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 0.9333$$

e) Dersom komponent C skal ha en levetid som er større enn 1 så må begge komponentene av type A ha en levetid som er større enn 1. Vi får derfor

$P(C > 1) = P(A_1 > 1)P(A_2 > 1) = (1 - P(A_1 \le 1))(1 - P(A_2 \le 1)) = (1 - 0.75)^2 = 0.0625$

Sannsynligheten for at komponent C skal ha en levetid på mindre eller lik 1 er derfor

$P(C \le 1) = 1 - 0.0625 = 0.9375$

Oppgave 5

a) $$I(0) = \int x^0 \ln(x)dx = \int \ln x dx = \frac{1}{1}x\ln x - \left(\frac{1}{1}\right)^2 x + C = x\ln x - x + C$$

$$I(1) = \int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \qquad I(2) = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

b) Funksjonen $f(x,y)$ er gitt ved:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{e-1}y \qquad \text{dersom} \quad 1\le x\le e \quad \text{og} \quad 0\le y\le 1$$

$f(x,y)=0$ ellers.

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{e-1}y\right)dy=\frac{1}{2}\ln x\int_0^1 dy+\frac{1}{e-1}\int_0^1 y=$$

$$\frac{1}{2}\ln x\cdot[y]_0^1+\frac{1}{e-1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2(e-1)}=0.5\cdot\ln x+0.2910$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{e-1}y\right)dx=\left[\frac{1}{2}(x\ln x-x)+\frac{1}{e-1}y\cdot x\right]_1^e=$$

$$\frac{1}{2}(e\ln e-e-1\ln 1+1+\frac{1}{e-1}y(e-1)=0.5+y$$

Oppgave 6

a) $$\frac{\partial}{\partial x}(Ax)=A'=\begin{bmatrix}3&2&5\\2&4&7\\8&7&8\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'Ax)=(A+A')x=\left(\begin{bmatrix}3&2&8\\2&4&7\\5&7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&5\\2&4&7\\8&7&8\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&4&13\\4&8&14\\13&14&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}6x_1+4x_2+13x_3\\4x_1+8x_2+14x_3\\13x_1+14x_2+16x_3\end{bmatrix}$$

b) $$AB=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8&12&-3\\-1&4&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Da matrisen A har en invers matrise B følger at $|A|\neq 0$

Vektorene v_1 , v_2 , v_3 er derfor lineært avhengige.

Oppgave 7

a) Da $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$ følger at $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) Dersom A og B er symmetriske så er $[(AB)']^{-1} = (B'A')^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

c) Hvis $X'X = X$, så er $X' = (X'X)' = X'X = X$. Setter vi inn $X' = X$ i uttrykket $X = X'X$ får vi $X = XX = X^2$

e) Vi har generelt at $AA^{-1} = I$. Fra dette følger $(AA^{-1})' = (A^{-1})'A' = I' = I$
Dersom A er symmetrisk er $A' = A$. Setter vi inn dette får vi
$(A^{-1})'A = I$ Herav følger $(A^{-1})'AA^{-1} = A^{-1}$ Dermed har vi vist at

$(A^{-1})' = A^{-1}$ noe som viser at A^{-1} er symmetrisk.

Oppgave 8

a) Vi ønsker å finne en parametervektor b som minimerer $e'e$ der

$$e = Y - Xb \quad \text{hvor} \quad Y = \begin{pmatrix} 72 \\ 70 \\ 67 \\ 59 \\ 33 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Løsningen er at $b = (X'X)^{-1}(X'Y)$

$$b = \frac{1}{480}\begin{pmatrix} 790 & -80 & -42 \\ -80 & 16 & 0 \\ -42 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 72 \\ 70 \\ 67 \\ 59 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.01 \\ 0.43 \\ 1.56 \end{pmatrix}$$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Sensorveiledning i:	MET 22141 Matematikk valgfag
Eksamensdato:	03.06.05, kl. 09.00 – 14.00
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	5

Oppgave 1

a) $y'' = y \quad \Leftrightarrow \quad y'' - y = 0$. Dette er en annen ordens homogen differensiallikning.
Den karakteristiske likningen er $r^2 - 1 = 0$ som har løsningene $r = 1$ og $r = -1$. Løsningen av differensiallikningen er derfor
$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad y' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}(-1) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$
Skal $y(0) = 1$ må I $C_1 + C_2 = 1$
Skal $y'(0) = 0$ må II $C_1 - C_2 = 0$
Legger vi sammen likningene får vi $2C_1 = 1$ Dette gir $C_1 = 0.5$
Setter vi dette inn i II får vi $C_2 = 0.5$. Den spesielle løsningen blir derfor
$y = 0.5e^x + 0.5e^{-x}$ Da $y''(x) = y(x) > 0$ for alle verdier av x følger at $y(x)$ er konveks. $x = 0$ er derfor et minimumspunkt.

b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \qquad y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$

$$y'' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}(-1) + \frac{4}{3}e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}$$

$$y'' - y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x} - (C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}) = e^{2x}$$

c) $$Min \int_0^{\ln 2} (y^2 + y'^2 + 2ye^{2x})dx,$$

Vi setter $F(x, y, y') = y^2 + y'^2 + 2ye^{2x}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2e^{2x} \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y + 2e^{2x} - 2y'' = 0$$

Herav følger $2y'' - 2y = 2e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad y'' - y = e^{2x}$ Fra b) vet vi :

Den generelle løsningen er $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{1}{3}e^0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ I $C_1 + C_2 = 3$

Benytter jeg kalkulator finner jeg

$$y(\ln 2)=C_1e^{\ln 2}+C_2e^{-\ln 2}+\frac{1}{3}e^{2\ln 2}=2C_1+0.5C_2+\frac{1}{3}4=\frac{13}{3}$$

Dette gir II $2C_1+\frac{1}{2}C_2=3$ 2I-II $2C_1+2C_2-(2C_1+\frac{1}{2}C_2)=\frac{3}{2}C_2=6-3=3$

Herav følger $C_2=2$ og dermed $C_1=3-C_2=3-2=1$

$$y=e^x+2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$$

Oppgave 2

a) $$g(z)=\int_0^z 3x\cdot f(x)dx+3z\int_z^1 f(x)dx-2z=\int_0^z 3xdx+3z\int_z^1 1\cdot dx-2z=$$

$$\left[3\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^z+3z[x]_z^1-2z=\frac{3}{2}\cdot z^2+3z(1-z)-2z=$$

$$\frac{3}{2}z^2+3z-3z^2-2z=-\frac{3}{2}z^2+z \qquad g'(z)=-3z+1$$

Skal $g'(z)=0$ må $z=\frac{1}{3}$ Fortjenesten blir da. $g\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=-0+e^0=1$$

c) Den forventede fortjenesten vil være en funksjon av z $z\geq 0$

$$g(z)=\int_0^z 3xf(x)dx+3z\int_z^{\infty} f(x)dx-2z=$$

$$\int_0^z 3x\cdot e^{-x}dx+3z\int_z^{\infty} e^{-x}dx-2z=3\int_0^z xe^{-x}dx+3z\left[-e^{-x}\right]_z^{\infty}-2z=$$

$$3\left[x(-e^{-x})\right]_0^z-3\int_0^z(-e^{-x})dx+3ze^{-z}-2z=$$

$$-3ze^{-z}-3\left[e^{-x}\right]_0^z+3ze^{-z}-2z=-3ze^{-z}-3e^{-z}+3+3ze^{-z}-2z=-3e^{-z}-2z+3$$

$g'(x)=-3e^{-z}(-1)-2=3e^{-z}-2=0$ Dette gir

$3e^{-z}=2 \qquad e^{-z}=\frac{2}{3} \qquad -z=\ln(\frac{2}{3}) \qquad z=-\ln(\frac{2}{3})=\ln\left(\frac{3}{2}\right)=0.4055$

Oppgave 3

a) $f(x,y)=2\sqrt{x}y+2xy^2$

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^1(2\sqrt{x}y+2xy^2)dy=\left[2\sqrt{x}\frac{y^2}{2}+2x\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\sqrt{x}+\frac{2}{3}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

b) $$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1 xy(2\sqrt{x}y+2xy^2)dy\right)dx=$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 2x^{\frac{3}{2}}y^2+2x^2y^3)dy\right)dx=\int_0^1\left[2x^{\frac{3}{2}}\frac{y^3}{3}+2x^2\frac{y^4}{4}\right]_0^1=$$

$$\int_0^1(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)dx=\left[\frac{2}{3}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{8}{30}+\frac{5}{30}=\frac{13}{30}\approx 0.4333$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.4333-0.6222\cdot 0.6944=0.0012$$

Oppgave 4

a) $P(S_1)=\frac{1}{4}$ $\quad P(F_1)=\frac{3}{4}$ $\quad P(S_2|F_1)=\frac{1}{3}$

$P(X=1)=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=2)=P(F_1)P(S_2|F_1)=\frac{3}{4}\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$P(X=3)=\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=4)=\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}1=\frac{1}{4}$

b) $E(X)=1\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=2.5$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\frac{1}{4}+3^2\frac{1}{4}+4^2\frac{1}{4}=\frac{30}{4}=7.5$

$Var(X^2)=E(X^2)-(E(X))^2=7.5-2.5^2=1.25$

c) $P(X=1)=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=2)=\frac{3}{4}\frac{1}{4}$ $\quad P(X=3)=\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$

$P(X=4)=\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}$ $\quad P(X=5)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4}$ $\quad P(X=6)=\left(\frac{3}{4}\right)^5\frac{1}{4}$

Generelt vil vi ha $P(X=x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\frac{1}{4}$

Her er X antall forsøk inntill første suksess. X vil være geometriske fordelt.
Jeg benytter summeformelen for en uendelig geometris rekke.

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\right)=\frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{3}{4})}=1$$

Oppgave 5

Nå er $X'Y=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 6 & 4 & 10 & 7 & 12 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\6\\4\\7\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29\\303\end{pmatrix}$

$$b=(X'X)^{-1}X'Y=\frac{1}{504}\begin{pmatrix}570 & -54\\ -54 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29\\303\end{pmatrix}=\frac{1}{504}\begin{pmatrix}168\\252\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.33333\\0.5\end{pmatrix}$$

Oppgave 6

Da $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=4+0+0-0-0-2=2\neq 0$ er vektorene lineært uavhengige

Oppgave 7

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-2=2 \qquad Tr(A)=2+2+1=5$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-(2-\lambda)=(2-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1]=$$

$$(2-\lambda)(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-1)=(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+1)=0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{eller} \quad \lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2 \cdot \frac{3^2-(\sqrt{5})^2}{4} = 2$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 5$$

Dette er de samme verdiene som vi fikk da vi beregnet $|A|$ og $Tr(A)$ direkte fra A

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Sensorveiledning i: MET 22141 Matematikk valgfag

Eksamensdato: 12.06.06, kl. 09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle

Totalt antall sider: 6

Oppgave 1

a) Den karakteristiske likningen blir $r^2 - 5r + 3 = 0$
Denne har løsningene

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3}}{2} \qquad r = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{og} \quad r = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

Generell løsning av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = Ae^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}x} + Be^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}x}$$

for tall A og B.

b) Den karakteristiske likningen blir $r^2 - ar + (a-2) = 0$
Denne har løsningene

$$r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(a-2)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{(a-2)^2 + 4}}{2}$$

Uttrykket under rottegnet er alltid positivt , så dette gir to forskjellige løsninger for alle tall a. Generell løsning av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = Ae^{\frac{a+\sqrt{a^2-4(a-2)}}{2}x} + Be^{\frac{a-\sqrt{a^2-4(a-2)}}{2}x}$$

for tall A og B.

c) La $F(x,y,y') = \left((y-y')^2 + y^2\right)\cdot e^{-5x}$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (2(y-y') + 2y)e^{-5x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(2(y-y')\cdot(-1)e^{-5x}) = \frac{d}{dx}(-2y+2y')e^{-5x}) =$$

$$(-2y'+2y'')e^{-5x} + (-2y+2y')e^{-5x}(-5) = (-2y'+2y''+10y-10y')e^{-5x} =$$
$$(2y''-12y'+10y)e^{-5x}$$

d) Eulerligningen er $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{dx}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$

det vil si

$$(2(y-y')+2y)e^{-5x} - (2y''-12y'+10y)e^{-5x} = (2y-2y'+2y-2y''+12y'-10y)e^{-5x} = 0$$
$$(-2y''+10y'-6y)e^{-5x} = 0$$
$$(y''-5y'+3y)e^{-x} = 0$$

Produktet er null hvis og bare hvis $y''-5y'+3y = 0$, så Eulerligningen kan skrives på formen $y''-5y'+3y = 0$

e) Fra a) vet vi at den generelle løsningen til Eulerligningen er

$$y(x) = Ae^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}x} + Be^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}x}$$

der A og B er tall. Betingelsene $y(0) = 0$ og $y(2) = 1$ gir likningene

(1) $\quad A + B = 0$

(2) $\quad Ae^{5+\sqrt{13}} + Be^{5-\sqrt{13}} = 1$

Den første likningen gir $B = -A$, og setter vi dette inn i den andre likningen får vi

$$Ae^{5+\sqrt{13}} - Ae^{5-\sqrt{13}} = 1$$

som betyr at $\qquad A = \frac{1}{e^{5+\sqrt{13}} - e^{5-\sqrt{13}}}$

og dette gir at $\qquad B = -\frac{1}{e^{5+\sqrt{13}} - e^{5-\sqrt{13}}}$

Den spesielle løsningen er

$$\frac{1}{e^{5+\sqrt{13}} - e^{5-\sqrt{13}}}(e^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}x} - e^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}x})$$

Oppgave 2

$f(x,y) = \frac{1}{12}(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} + x)$ dersom $0 \le x \le 4$ og $0 \le y \le 1$

$f(x,y) = 0$ ellers.

a) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (\frac{1}{12}(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} + x)dy = \left[\frac{1}{12}(x^{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} + xy)\right]_0^1 =$

$\frac{1}{12}(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + x) = \frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}x$

b) Hvis $f(x,y)$ skal være en sannsynlighetstetthet må $f(x,y) \ge 0$ for alle verdier av x og y. Da $f(x,y)$ er en sum av to ikkenegative ledd er dette kravet opplagt oppfylt.

Det andrekravet er at $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Nå er

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = \int_0^4 (\frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}x)dx =$

$\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

c) $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dx)dy = \int_0^1(\int_0^4 xy(\frac{1}{12}(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} + x)dx)dy =$

$\int_0^1(\int_0^4(\frac{1}{12}(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{4}{3}} + x^2y)dx)dy = \int_0^1\left[\frac{1}{12}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}x^3y)\right]_0^4 dy = \int_0^1(\frac{16}{15}y^{\frac{4}{3}} + \frac{16}{9}y)dy =$

$\left[\frac{16}{15}\cdot\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}} + \frac{16}{9}\cdot\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{16}{35} + \frac{8}{9} = \frac{424}{315} = 1.3460$

d) $P(X \le 1) = \int_{-\infty}^{1} f_x(x)dx = \int_0^1(\frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}x)dx = \left[\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 =$

$\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$

e) Dersom Z er en stokastisk variabel så er $Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$
Herav følger at $E(Z^2) = Var(Z) + (E(Z))^2$
Er spesielt $Z = XY$ får vi
$E((XY)^2) = Var(XY) + (E(XY))^2 = 0.8803 + 1.3460^2 = 2.6920$

Oppgave 3

La $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ og $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

a) $\frac{\partial}{\partial x}(a'x) = a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x}(x'Ax) = (A + A')x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) $\frac{\partial}{\partial x}(a'x - x'Ax) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

c) Skal $\frac{\partial}{\partial x}(a'x - x'Ax) = 0$ må $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vi må finne den inverse matrisen til $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 48 + 0 + 0 - 2 - 0 - 36 = 10$$

$$B_{Adj}=\begin{pmatrix}23 & 3 & -12\\ 3 & 3 & -2\\ -12 & -2 & 8\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}2.3 & 0.3 & -1.2\\ 0.3 & 0.3 & -0.2\\ -1.2 & -0.2 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$x=B^{-1}a=\begin{pmatrix}2.3 & 0.3 & -1.2\\ 0.3 & 0.3 & -0.2\\ -1.2 & -0.2 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.7\\0.3\\0.8\end{pmatrix}$$

Oppgave 4

a) $|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 5\end{vmatrix}=50+0+0-2-0-0=48$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 5-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix}(2-\lambda)(5-\lambda)^2-(2-\lambda)=(2-\lambda)((5-\lambda)^2-1)=$$

$(2-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24)=0$ Egenverdiene er $\lambda=2$, $\lambda=4$ og $\lambda=6$

b) Opplysning : Egenverdiene til A^{-1} er $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{4}$ og $\lambda_3=\frac{1}{6}$

$|A^{-1}|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\frac{1}{48}$. Dette stemmer med regneregelen $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{48}$

Oppgave 5

a) $(M+M')'=M'+(M')'=M'+M=M+M'$.

b) La A , B , X og Y være $n\times n$ matriser. Her er $|A|\neq 0$

i) $AX=B$ gir $X=A^{-1}B$ ii) $YA=B$ gir $Y=BA^{-1}$

iii) $X'=(A^{-1}B)'=B'(A^{-1})'=BA^{-1}=Y$ da B og A^{-1} er symmetriske matriser.

Oppgave 6

Opplysningene kan skrives: $P(I) = 0.04$ $\quad P(A \mid I) = 0.8$ $\quad P(F \mid A) = 0.9$

a) $P(I \cap A) = P(I)P(A \mid I) = 0.04 \cdot 0.8 = 0.032$.

b) Da alarmen ikke vil gå uten at det er innbruddsforsøk så er $P(A) = 0.032$
$P(A \cap F) = P(A)P(F \mid A) = 0.032 \cdot 0.9 = 0.0288$

c) Med uttrykket $P(A \cap F \mid I)$ mener jeg sannsynligheten for at alarmen går og tyven flykter dersom det er et innbruddsforsøk.

$$P(A \cap F \mid I) = \frac{P(I \cap A \cap F)}{P(I)} = \frac{0.04 \cdot 0.8 \cdot 0.9}{0.04} = 0.72.$$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

<u>SENSORVEILEDNING I</u>: MET 22141 Matematikk valgfag

Eksamensdato: 01.12.06, kl 09.00 - 14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle

Totalt antall sider: 6

Oppgave 1

a) $y'+3x^2y=0$ Denne differensialllikningen er på formen

$y'+a(x)y=b(x)$ hvor $a(x)=3x^2$ og $b(x)=0$

Løsningen er $y(x)=e^{-\int a(x)dx}(C+\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx)$

Nå er $\int a(x)dx=\int 3x^2dx=x^3+C$. Løsningen blir derfor

$y=e^{-x^3}(C+\int e^{x^3}\cdot 0dx)=Ce^{-x^3}$

b) $y'+3x^2y=x^2$ Her er $a(x)=3x^2$ $b(x)=x^2$ (se punkt a))

Setter vi inn får vi $y=e^{-x^3}(C+\int e^{x^3}x^2dx)$

La oss først løse $\int x^2e^{x^3}dx$. Setter vi $u=x^3$ blir $du=3x^2dx$

og dermed $\frac{1}{3}du=x^2dx$. Setter vi dette inn får vi

$\int x^2e^{x^3}dx=\int e^u\cdot\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}e^u+C_1=\frac{1}{3}e^{x^3}+C_1$. Fra dette får vi:

$y=e^{-x^3}(C+\frac{1}{3}e^{x^3})=Ce^{-x^3}+\frac{1}{3}$

c) $y''-y'-2y=0$ Den karakteristiske likningen er $r^2-r-2=0$

som har løsningene $r=-1$ eller $r=2$ Generell løsning $y=C_1e^{-x}+C_2e^2$

d) Er $g(x)=\frac{a_4}{a_3}$ så er $g'(x)=0$ og $g''(x)=0$ setter vi dette inn i

differensiallikningen $a_1y''+a_2y'+a_3y=a_4$ får vi:

$a_3\cdot\frac{a_4}{a_3}=a_4$. Det vil si $g(x)$ er en løsning.

Er $h(x) = f(x) + \frac{a_4}{a_3}$ så vil $h'(x) = f'(x)$ og $h''(x) = f''(x)$

Hvis $y = f(x)$ er en løsning av differensiallikningen $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ så

er $h(x) = f(x) + \frac{a_4}{a_3}$ så vi $h'(x) = f'(x)$ og $h''(x) = f''(x)$ Setter vi dette inn i

differensiallikningen $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = a_4$ får

$$a_1 \cdot f''(x) + a_2 \cdot f'(x) + a_3(f(x) + \frac{a_4}{a_3}) = a_1 f''(x) + a_2 f'(x) + a_3 f(x) + a_3 \cdot \frac{a_4}{a_3} = a_4$$

e) $J(y) = \int_0^1 (3y'^2 - 4y' + 6y^2 + 5)e^{-x}dx$

$F(x, y, y') = (3y'^2 - 4y' + 6y^2 + 5)e^{-x}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 12ye^{-x}$ $\frac{\partial F}{\partial y'} = (6y' - 4)e^{-x}$

$\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 6y''e^{-x} + (6y' - 4)e^{-x}(-1) = (6y'' - 6y' + 4)e^{-x}$

Eulerligningen blir $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = (12y - 6y'' + 6y' - 4)e^{-x} = 0$

Denne han skrives som :

$6y'' - 6y' - 12y = -4$ eller $3y'' - 3y' - 6y = -2$

Jeg løser først den homogene differensialligningen $3y'' - 3y' - 6y = 0$

Karakteristisk ligning $3r^2 - 3r - 6 = 0$ som har løsningene

$r_1 = -1$ eller $r_2 = 2$

Generell løsning av den homogene likningen er

$C_1 e^{-x} + C_2 e^2$. Generell løsning av $3y'' - 3y' - 6y = -2$ er derfor

$C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{-2}{-6} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3}$

Skal løsningen gå gjennom $(0, \frac{1}{3})$ må $C_1 e^{-0} + C_2 e^0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Herav følger I $C_1 + C_2 = 0$ Skal løsningen gå gjennom $(1, \frac{4}{3})$ må

$C_1 e^{-1} + C_2 e^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ Herav følger II $e^{-1}C_1 + e^2 C_2 = 1$

Fra I får vi $C_2 = -C_1$ setter vi dette inn i II får vi

$e^{-1}C_1 - e^2 C_1 = 1$ Herav følger $C_1 = \frac{1}{e^{-1} - e^2}$. Den spesielle løsningen er derfor:

$$\frac{e^{-x} - e^{2x}}{e^{-1} - e^2} + \frac{1}{3}$$

Oppgave 2

$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ Setter vi $u = 1+e^x$ vil $du = e^x dx$ Vi får derfor

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

Vi får derfor $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_{-\infty}^{\infty} = -0+1 = 1$

Da dessuten $f(x) > 0$ for alle x så er $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ en sannsynlighetstetthet.

$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_{-\infty}^{b} = -\frac{1}{1+e^b} + 1 = \frac{3}{4}$. Herav følger $\frac{1}{1+e^b} = \frac{1}{4}$

$e^b = 3$ og dermed $b = \ln(3) \approx 1.0986$

Oppgave 3

a) $h(y) = y\ln y - y$ $\quad h'(y) = 1\cdot \ln y + y\cdot\frac{1}{y} - 1 = \ln y$

Er $g(y) = \frac{1}{2}(\ln y)^2 + C$ så er $g'(y) = \frac{1}{2}\cdot(2\ln y)\frac{1}{y} = \frac{\ln y}{y}$

b) $f(x,y) = \frac{1}{2e-1}(\frac{x\ln y}{y} + x)$ dersom $0 \le x \le 2$ og $1 \le y \le e$

$f(x,y) = 0$ ellers

i) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_1^e \frac{1}{2e-1}(\frac{x\ln y}{y} + x)dy = \frac{x}{2e-1}\int_1^e (\frac{\ln y}{y} + 1)dy =$

$$\frac{x}{2e-1}\left[\frac{1}{2}(\ln y)^2 + y\right]_1^e = \frac{x}{2e-1}(\frac{1}{2} + e - 1) = \frac{x}{2}$$

ii) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

iii) Beregner først $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{2e-1}(\frac{x\ln y}{y} + x)dx =$

$$\frac{1}{2e-1}\int_0^2\left(\frac{\ln y}{y}x+x\right)dx=\frac{1}{2e-1}\left[\frac{\ln y}{y}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{2}{2e-1}\left(\frac{\ln y}{y}+1\right)$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_y(y)dy=\int_1^e y\frac{2}{2e-1}\left(\frac{\ln y}{y}+1\right)dy=\frac{2}{2e-1}\int_1^e(\ln y+y)dy=$$

$$\frac{2}{2e-1}\left[y\ln y-y+\frac{y^2}{2}\right]_1^e=\frac{2}{2e-1}\left(e-e+\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2+1}{2e-1}\approx 1.8909$$

Oppgave 4

a) $Tr(ABA^{-1})=Tr(A^{-1}AB)=Tr(IB)=Tr(B)$

b) La $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+0+a-0-a-0=1$

$$A'=\begin{pmatrix}1&a&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A_{adj}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-a&1&a\\a&-1&1-a\end{pmatrix}$$

Prøve: $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-a&1&a\\a&-1&1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$E=\begin{pmatrix}2a+1&-2&-2a+4\\-2a&3&2a\\2a&-2&5-2a\end{pmatrix}$$

i) Sett vi inn $a=0$ får vi $E=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&3&0\\0&-2&5\end{pmatrix}$

For å finne egenverdiene må vi løse likningen

$\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\0&3-\lambda&0\\0&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)=0$ som gir verdiene

$\lambda_1=1\quad\lambda_2=3\quad\lambda_3=5$

ii) Setter vi inn $a=1$ i matrisen E får vi $E=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -2 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$

For å finne egenverdiene må vi løse likningen

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 3-\lambda & 2\\ 2 & -2 & 3-\lambda\end{pmatrix}=(3-\lambda)^3-8+8+4(3-\lambda)-4(3-\lambda)-4(3-\lambda)=$$

$(3-\lambda)^3-4(3-\lambda)=(3-\lambda)((3-\lambda)^2-4)=0$

Dette gir $3-\lambda=0$ eller $3-\lambda=-2$ eller $3-\lambda=2$

$\lambda_1=3$ $\lambda_3=5$ eller $\lambda_2=1$

$Tr(E)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+3+5=9$ $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\cdot3\cdot5=15$

iii) Da $(ADA^{-1})(AD^{-1}A^{-1})=AD(AA^{-1})D^{-1}A^{-1}=ADD^{-1}A=AA^{-1}=I$
så er $AD^{-1}A^{-1}$ den inverse til ADA^{-1}

Oppgave 5

a) X er binomisk fordelt $n=4$, $p=0.8$? $P(X=3)=\binom{4}{3}0.8^3 0.2^1=0.4096$

$E(X)=4\cdot0.8=3.2$ $Var(X)=4\cdot0.8\cdot0.2=0.64$

$X+Y$ er binomisk fordelt $n=8$ $p=0.8$

$P(X+Y=8)=\binom{8}{8}0.8^8=0.1678$ $P(X+Y=7)=\binom{8}{7}0.8^7\cdot0.2=0.3355$

$E(X+Y)=8\cdot0.8=6.4$ $Var(X+Y)=8\cdot0.8\cdot0.2=1.28$

b) Nå er $P(A)=0.7$ og $P(B)=0.9$

$P(X+Y=8)=0.7^4\cdot0.9^4=0.1575$

$P(X+Y=7)=P(X=4)P(Y=3)+P(X=3)P(Y=4)=$

$$\binom{4}{4}0.7^4\cdot0.7^0\binom{4}{3}0.9^3\cdot0.1^1+\binom{4}{3}0.7^3\cdot0.3^1\binom{4}{4}0.9^4 0.1^0=0.3401$$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=4\cdot0.7+4\cdot0.9=6.4$

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)=4\cdot0.7\cdot0.3+4\cdot0.9\cdot0.1=1.2$

Oppgave 6

a) Jeg lager en determinant av de tre kolonnevektorene.

$$\text{Da} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 30 + 8 - 20 - 20 - 3 = 0$$

Er de tre vektorene er lineært avhengige.

b) Jeg lager en determinant av de tre kolonnevektorene.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & (a+1)^2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 - (a+1)^2 + 2 - 0 - 3((a+1)^2 = -4 - 4(a+1)^2$$

Da $(a+1)^2 \geq 0$ for alle verdier av a vil determinanten være negativ og dermed forskjellig fra null for alle verdier av a.
Vektorene er derfor lineært uavhengige for alle verdier av a

BI HANDELSHØYSKOLEN Institutt for samfunnsøknomi

Sensorveiledning i: MET 22141 Matematikk valgfag

Eksamensdato: 23.05.07, kl 09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle

Totalt antall sider: 5

Oppgave 1

(a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -20 \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 18 \\ 2 & 25 & 14 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 18 \\ 2 & 25 & 14 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 400$$

Vi har en regneregel som sier at $|A^2| = |A|\,|A| = (-20)(-20) = 400$

For å finne egenverdiene må vi beregne $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$(1-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) - 6(5-\lambda) = (5-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) - 6) =$

$(5-\lambda)(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-6) = (5-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 5$ eller $\lambda = 4$ eller $\lambda = -1$

$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 5 \cdot 4 \cdot -1 = -20$

(b) Da B er symmetrisk vil $B' = B$ Herav følger at $(DBD')' = D''B'D' = DBD'$ som viser at DBD' er symmetrisk

(c) Da $|F^2| = |F|\,|F| \geq 0$ og $|E| < 0$ Kan ikke $F^2 = E$

Oppgave 2

(a)

$$F(x,y,y') = 2xy - 2ay + 3yy' + xy'^2 - ay'^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 2a + 3y' \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 3y + 2xy' - 2ay'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 3y' + 2y' + 2xy'' - 2ay'' = 5y' + 2xy'' - 2ay''$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2x - 2a + 3y' - 5y' - 2xy'' + 2ay'' =$$

$$2x - 2a - 2y' - 2(x-a)y'' = -2(x-a)y'' - 2y' + 2(x-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a-x)y'' - 2y' + 2(x-a) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a-x)y'' - y' + (x-a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-x)y'' - y' = (a-x)$$

(b) $y'' + \frac{1}{x}y' = 1$ Dersom vi setter $y' = z$ får vi differensiallikningen

$z' + \frac{1}{x}z = 1$ Setter vi $A(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$ og $b(x) = 1$ vil

$z = e^{-A(x)}(C + \int(e^{A(x)} \cdot b(x))dx = e^{-\ln x}(C + \int e^{\ln x} \cdot 1 \cdot dx) =$

$\frac{1}{x}(C + \int x dx) = \frac{1}{x}(C + \frac{1}{2}x^2) = \frac{C}{x} + \frac{1}{2}x$

$y = \int z' dx = \int(\frac{C}{x} + \frac{1}{2}x)dx = C\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C_2$

Oppgave 3

(a) La $F(x) = \ln(x^4+1) + C$ Da er $F'(x) = \frac{1}{x^4+1}(4x^3) = \frac{4x^3}{x^4+1}$ så er

$\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \ln(x^4+1) + C$

Alternativ løsning: $\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx$ Sett $u = x^4 + 1$ da er $du = 4x^3dx$

Setter vi inn dette får vi $\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \int \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3dx = \int \frac{1}{u}du =$

$\ln|u| + C = \ln(x^4+1) + C$

(b) La $A(x) = \int \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \ln(x^4+1)$ og $b(x) = 0$ da er løsningen

av differensiallikningen $y' + \frac{4x^3}{x^4+1}y = 0$ gitt ved

$y = e^{-A(x)}(C + \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx) =$

$e^{-\ln(x^4+1)}(C + e^{\ln(x^4+1)} \cdot 0) = \frac{1}{x^4+1} \cdot (C + 0) = \frac{C}{x^4+1}$

Skal løsningen gå gjennom punktet $(1, 10)$ må $y(1) = C \cdot \frac{1}{2} = 5$

Dette medfører at $C = 10$ og $y = \frac{10}{x^4+1}$

Oppgave 4

(a) Etter t timer er totalt bensinforbruk $8t$. Gjenværende mengde

bensin på tanken er derfor $W = 48 - 8t$

(b) $V' = -kV - 8 \quad \Leftrightarrow \quad V' + kV = -8 \quad \Leftrightarrow \quad V' + kV = b$ der $b = -8$

Dette er en første ordens differensiallikning med konstante koeffisienter.

Løsningen er $V = Ce^{-kx} + \frac{b}{k} \quad er \quad k = 0.2$ får vi:

$V = Ce^{-0.2t} + \frac{-8}{0.2} = Ce^{-0.2t} - 40$

Skal $V(0) = C - 40 = 48$ må $C = 88$ Dette gir $V = 88e^{-0.2t} - 40$

(c) Etter 5 timer er volumet i tanken $V(5) = 88e^{-0.2 \cdot 5} - 40 = -7.62$

Bilen kan ikke kjøre i 5 timer.

Oppgave 5

$f(x,y) = \frac{45}{37}(1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4)$

(a) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) = \frac{45}{37}\int_0^1 (1-x^4+2x^2y^2-y^4)dy = \frac{45}{37}\left[y - x^4y + 2x^2 \cdot \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right]_0^1 =$

$\frac{45}{37}(1 - x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}) = \frac{45}{37}(-x^4 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5})$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = \frac{45}{37}\int(-x^4 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5})dx = \frac{45}{37}\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{5}x\right]_0^1 =$

$\frac{45}{37}(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} + \frac{4}{5}) = 1$

(c) $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \frac{45}{37}\int_0^1(\int_0^1 xy(1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4)dx)dy =$

$\frac{45}{37}\int_0^1(\int_0^1 xy - x^5y + 2x^3y^3 - xy^5)dx)dy = \frac{45}{37}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}x^6y + 2 \cdot \frac{1}{4}x^4y^3 - \frac{1}{2}x^2y^5\right]_0^1 dy =$

$\frac{45}{37}\int_0^1(\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}y+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{2}y^5)dy = \frac{45}{37}\int_0^1(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{2}y^5)dy = \frac{45}{37}\left[\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{8}y^4-\frac{1}{12}y^6\right]_0^1 =$

$\frac{45}{37}(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}) = \frac{75}{296} = 0.2534$

(d) $\rho = \frac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{0.2534-0.4865^2}{0.0761} = 0.2197$

Oppgave 6

(a) Sannsynligheten for at den første terningen faller på 5 og den andre

terningen på 4 er $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Annengradslikningen blir i dette tilfell $x^2+px+q=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+5x+4=0$

Løsningene er $x = \frac{-p\pm\sqrt{p2-4q}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot4}}{2}$ som gir løsningene

$x_1 = -1$ og $x_2 = -4$

(b) Skal annengradslikningen ha eksakt en løsning må $p^2-4q=0$

Det vil si $p^2 = 4q$ Vi prøver oss frem med forskjellige verdier for q

q	$p^2 = 4q$	Løsning
1	$p^2 = 4$	$p = 2$
2	$p^2 = 8$	Ingen verdier av p passer
3	$p^2 = 12$	Ingen verdier av p passer
4	$p^2 = 16$	$p = 4$
5	$p^2 = 20$	Ingen verdier av p passer
6	$p^2 = 24$	Ingen verdier av p passer

Vi får derfor eksakt en løsning dersom

$p = 2$ og $q = 1$ og når $p = 4$ og $q = 4$

Sannsynligheten blir derfor $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Oppgave 7

(a) $P(A^c) = 1-P(A) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $P(A^c\cap B) = P(A \text{ bommer og } B \text{ treffer}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Sannsynligheten for at det blir skutte 3 ganger , og at a vinner er

$P(A^c\cap B^c\cap A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Sannsynligheten for at det blir skutt 5 ganger og at a vinner er $P(A^c \cap B^c \cap A^c \cap B^c \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$.

Sannsynligheten for at det blir skutt 1 ,tre eller 5 ganger og at a vinner er :

$\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 = 0.4815$

(b) Sannsynligheten for at a vinner spillet er $\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^4+\ldots\ldots = \frac{1}{3}(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}) = \frac{1}{2}$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Sensorveiledning:	MET 22141 Matematikk valgfag
Eksamensdato:	23.05.08, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler tillatt.
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	5

Oppgave 1

(a) Finn den generelle løsningen av den separable differensiallikningen
$$e^{y+53}\dot{y} = 2t.$$

Løsning. $e^{y+53}\dot{y} = 2t \iff \int e^{y+53}dy = \int 2tdt$ som gir $e^{y+53} = t^2 + C \implies y + 53 = \ln(t^2 + C) \implies \boxed{y = \ln(t^2 + C) - 53}$

(b) Finn løsningen av differensiallikningen
$$\dot{y} - 2ty = 23e^{t^2}$$
som tilfredstiller $y(0) = 3$.

Løsning. Integrerende faktor er $e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$. $\dot{y} - 2ty = 23e^{t^2} \iff \dot{y}e^{-t^2} - 2tye^{-t^2} = 23e^{t^2}e^{-t^2} \iff \frac{d}{dt}(ye^{-t^2}) = 23$ som gir $ye^{-t^2} = \int 23dt = 23t + C$. Generell løsning $y = 23te^{t^2} + Ce^{t^2}$. $y(0) = C \implies C = 3$. Dermed: $\boxed{y(t) = 23te^{t^2} + 3e^{t^2}}$

(c) Finn løsningen av
$$\ddot{y} + 18\dot{y} - 403y = 0$$
som tilfredstiller $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 44$.

Løsning. Kar. likning: $r^2 + 18r - 403 = 0 \iff r = -31$ eller $r = 13$. Generell løsning $y = C_1e^{-31t} + C_2e^{13t} \implies \dot{y} = -31C_1e^{-31t} + 13C_2e^{13t}$. $y(0) = C_1 + C_2 = 0 \implies C_2 = -C_1$. $\dot{y}(0) = -31C_1 + 13C_2 = 44 \implies -31C_1 + 13(-C_1) = -44C_1 = 44 \implies C_1 = -1$ og $C_2 = 1$. Dermed: $\boxed{y(t) = e^{13t} - e^{-31t}}$

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i variasjonsproblemet

$$\min \int_0^1 ((12t + 24t^2)y + \dot{y}^2)dt, \quad y(0) = 1 \text{ og } y(1) = 0.$$

(a) Finn den generelle løsningen av Euler-likningen for dette problemet.

Løsning. $F = (12t + 24t^2)y + \dot{y}^2$. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) = (12t + 24t^2) - \frac{d}{dt}(2\dot{y}) = 0 \implies 12t + 24t^2 - 2\ddot{y} = 0 \implies \ddot{y} = 6t + 12t^2 \implies \dot{y} = 3t^2 + 4t^3 + C_1 \implies$

Generell løsning: $\boxed{y(t) = t^3 + t^4 + C_1 t + C_2}$

(b) Finn løsningen av likningen i (a) som tilfredstiller initialbetingelsene.

Løsning. $y(0) = C_2 \implies C_2 = 1$. $y(1) = 1^3 + 1^4 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 2 + C_1 + 1 = 3 + C_1 = 0 \implies C_1 = -3$. Dermed: $\boxed{y(t) = t^3 + t^4 - 3t + 1.}$

Oppgave 3

Anta at sannsynlighten for at du består førerprøven på første forsøk er $p = 0.75$. Hvis du ikke består, forsøker du på nytt, og da er også sannsynligheten for å bestå, $p = 0.75$. Anta at du ved hvert forsøk har sannsynlighet $p = 0.75$ for å bestå, og at du fortsetter helt til du har klart det.

(a) Hva er sannsynligheten for at du ikke behøver å kjøre opp mer enn 3 ganger?

Løsning. Består på 1. forsøk: p
Består på 2. forsøk: $(1-p)p$
Består på 3. forsøk: $(1-p)^2 p$
$P(\{X \leq 3\}) = p + (1-p)p + (1-p)^2 p = 3p - 3p^2 + p^3 = p\,(p^2 - 3p + 3) = 0.75 \cdot (0.75^2 - 3 \cdot 0.75 + 3) = \boxed{0.98438}$

(b) La X være antall forsøk du bruker for å bestå. Hva er sannsynligheten for at $2 \leq X \leq 6$?

Løsning. $P(\{2 \leq X \leq 6\}) = (p-1)p + (p-1)^2 p + (p-1)^3 p + (p-1)^4 p + (p-1)^5 p = (1-p)p(1 + (p-1) + (p-1)^2 + (p-1)^3 + (p-1)^4) = (1-p)p\frac{1-(1-p)^5}{1-(1-p)} = (1-p)(1-(1-p)^5) = 0.25 \cdot (1 - (0.25)^5) = \boxed{0.24976}$

Oppgave 4

Gå ut fra at en stokastisk variabel X har sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{14}x(1+x) & \text{for} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Beregn $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ og $P(\{X \ge \frac{1}{2}\})$.

Løsning. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{14}x(1+x)dx = \boxed{1}$

$P(\{X \ge \frac{1}{2}\}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{3}{14}x(1+x)dx = \boxed{\frac{27}{28}}$

(b) Beregn $E[X]$.

Løsning. $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{3}{14}x(1+x)dx = \boxed{\frac{10}{7}}$

Oppgave 5

Gå ut fra at X er en stokastisk variabel som kan være 0, 1, eller 2, og at Y er en stokastisk variabel som kan være -1 eller 1. Gå ut fra at

$$P(\{X=0, Y=-1\}) = 0.1$$
$$P(\{X=0, Y=1\}) = 0.1$$
$$P(\{X=1, Y=-1\}) = 0.02$$
$$P(\{X=1, Y=1\}) = 0.01$$

og anta $E[Y] = 0$.

(a) Finn $P(\{X=2, Y=-1\})$, $P(\{X=2, Y=1\})$, $P(\{X=2\})$ og $E[X]$.

Løsning. Setter $p = P(\{X=2, Y=-1\})$ og $q = P(\{X=2, Y=1\})$. $E[Y] = (-1)\cdot P(\{Y=-1\}) + 1\cdot P(\{Y=1\}) = (-1)\cdot(0.1+0.02+p) + (0.1+0.01+q) = q-p-0.01 = 0 \implies q = p+0.01$. Alle sannsynlighetene må summere til $1 \implies 0.1+0.1+0.02+0.01+p+q = p+q+0.23 = 1 \implies p+(p+0.01)+0.23 = 1 \implies 2p = 1-0.24 \implies p = 0.76/2 = \boxed{0.38} \implies q = \boxed{0.39}$

(Alternativt: $E[Y] = 0 \implies 0.1+0.02+p = 0.5 \implies p = 0.38$ og $0.1+0.01+q = 0.5 \implies q = 0.39$)

$P(\{X=2\}) = p+q = 1-0.23 = \boxed{0.77}$

$E[X] = 0\cdot(0.1+0.1) + 1\cdot(0.01+0.02) + 2(p+q) = 2p+2q+0.03 = 2\cdot 0.77+0.03 = \boxed{1.57}$

(b) Finn $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ og $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Løsning. $E[X^2] = 0\cdot(0.1+0.1)+1\cdot(0.01+0.02)+2^2(p+q) = 4p+4q+0.03 = 4\cdot 0.77+0.03 = 3.11$

$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = 3.11-(1.57)^2 = \boxed{0.6451}$

$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2]-E[Y] = E[Y^2] = (-1)^2\cdot(0.1+0.02+p) + 1^2\cdot(0.1+0.01+q) = p+q+0.23 = 0.77+0.23 = \boxed{1}$

$E[XY] = 0\cdot(0.1+0.1) + (-1)\cdot 0.02 + 1\cdot 0.01 + (-2)\cdot p + 2\cdot q = 2q-2p-0.01 = 0.01$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y] = 0.01-0 = \boxed{0.01}$

Oppgave 6

Finn en verdi for h, slik at vektorene

$$\begin{pmatrix} 3 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er lineært avhenige.

Løsning. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ h & h & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3h = 0 \Longrightarrow \boxed{h = 0}$

Oppgave 7

Ta utganspunkt i funksjonen:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 - 7x_2 + 6$$

(a) Skriv f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der A er en symmetrisk 2×2-matrise og B er en 1×2-matrise.

Løsning. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

(b) Finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$. Vis at A er invertibel, og bruk dette til å vise at f har ett entydig stasjonært punkt. (Du trenger ikke å finne det stasjonære punktet.)

Løsning. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = 2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6x_1 - 4x_2 + 2 \\ -4x_1 - 2x_2 - 7 \end{pmatrix}$
$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0 \iff 2A\mathbf{x} + B^T = 0$. Siden $|A| = -3 - 4 = -7$, eksisterer A^{-1}, så $2A\mathbf{x} + B^T = 0 \iff \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}B^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$. Det stasjonære punktet finner vi ved å regne ut dette.

Oppgave 8

Gå ut fra at A og B er symmetriske $n \times n$ matriser. (At A og B er symmetriske, er det samme som å si at $A = A^T$ og $B = B^T$.) La $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$, og besvar oppgaven utfra setninger i boka eller forelesningene. (Det er *ikke* nødvendig å oppgi nøyaktig refereanse til setningene du bruker.)

(a) Vis at $A + B$ er symmetrisk og at $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$.

Løsning. En setning sier at $(A+B)^T = A^T + B^T$. Hvis A og B er symmetriske, vet vi at $A^T = A$ og $B^T = B$. Derfor $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$. Dette viser at $A + B$ er symmetrisk.
$\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T A + \mathbf{x}^T B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ ved å benytte de to distributive lovene.

(b) Forklar ut fra definisjonen av positivt definitt, at hvis $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ er positivt definitte kvadratiske former, så er også den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x}$ positivt definitt. Vis at hvis både A og B bare har positive egenverdier, så har også $A + B$ bare positive egenverdier.

Løsning. At $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ positivt definitte betyr at $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ og og $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$ så lenge $\mathbf{x} \neq 0$. Dermed er også og $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$ så lenge $\mathbf{x} \neq 0$. Dette er definisjonen på positivt definitt, så $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x}$ er altså positivt definitt.
Hvis A og B bare har positive egenverdier, vet vi fra en setning at $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ er positivt definitte kvadratiske former. Dermed vet vi at den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x}$ er positivt definitt. Fra den samme setningen vet vi dermed at $A + B$, bare har positive egenverdier.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Sensorveiledning i: MET 22141 Matematikk valgfag

Eksamensdato: 22.05.09, 09:00 – 14:00

Totalt antall sider: 5

Oppgave 1

(a) Finn den generelle løsningen av den separable differensiallikningen

$$\dot{y} = 2ty^2.$$

Løsning. $\dot{y} = 2ty^2 \implies \frac{\dot{y}}{y^2} = 2t \implies -\frac{1}{y} = t^2 + C \implies \underline{\underline{y(t) = -\frac{1}{t^2+C}}}$

(b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$\dot{y} - 4t^3y = t^3e^{t^4}$$

som tilfredstiller $y(0) = 1$.

Løsning. Integrerende faktor: e^{-t^4}. $\frac{d}{dt}(ye^{-t^4}) = t^3e^{t^4}e^{-t^4} = t^3 \implies ye^{-t^4} = \frac{1}{4}t^3 + C \implies \underline{y(t) = \frac{1}{4}t^3e^{t^4} + Ce^{t^4}}$ $y(0) = 1$ gir $C = 1 \implies \underline{\underline{y(t) = \frac{1}{4}t^3e^{t^4} + e^{t^4}}}$

(c) Finn løsningen av

$$\ddot{y} - 30\dot{y} + 225y = 450$$

som tilfredstiller $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 4$.

Løsning. $r^2 - 30r + 225 = 0 \implies r = 15 \implies y_h = (A + Bt)e^{15t}$. $y_p = \frac{450}{225} = 2 \implies \underline{y = (A + Bt)e^{15t} + 2} \implies \dot{y} = e^{15t}(15A + B + 15Bt) \implies \dot{y}(0) = 15A + B$, $y(0) = A + 2 \implies 15A + B = 4$ og $A + 2 = 0 \implies A = -2$ og $B = 34$.
$\underline{\underline{y(t) = (34t - 2)e^{15t} + 2}}$

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i variasjonsproblemet

$$\max \int_0^2 (\ln \dot{y} + y)dt, \quad y(0) = 0 \text{ og } y(2) = \ln 2.$$

(a) Finn den generelle løsningen av Euler-likningen for dette problemet.

Løsning. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) = 0$, $F = \ln \dot{y} + y$, gir $\frac{d}{dt}(\frac{1}{\dot{y}}) = 1 \implies \frac{1}{\dot{y}} = t + C_1 \implies \dot{y} = \frac{1}{t+C_1} \implies$
$\underline{\underline{y(t) = \ln(t + C_1) + C_2}}$

(b) Finn løsningen av likningen i (a) som tilfredstiller initialbetingelsene.

Løsning. $y(0) = \ln(C_1) + C_2 = 0, y(2) = \ln(2 + C_1) + C_2 = \ln 2 \implies \ln(2 + C_1) - \ln(C_1) = \ln 2 \implies \frac{C_1+2}{C_1} = 2 \implies C_1 + 2 = 2C_1 \implies$
$C_1 = 2 \implies C_2 = -\ln(C_1) = -\ln(2)$
$\underline{\underline{y(t) = \ln(t + 2) - \ln 2 = \ln(\frac{1}{2}t + 1)}}$

Oppgave 3

Et flyselskap opererer blant annet med et lite tomotors fly som kun tar 10 passasjerer. Flyselskapet har erfaring for at en person som har kjøpt bilett med sannsynlighet $p = 0.8$ vil møte fram til avgang.

(a) La n være antall billetter som selges og la X være antall passasjerer som møter fram til avgang. Hva kalles fordelingen til X ? Anta at selskapet selger $n = 10$ biletter. Beregn $P(\{X = 10\})$ og $P(\{X = 9\})$.

Løsning. Binomisk fordeling.
$P(\{X = 10\}) = p^{10} = 0.8^{10} = \underline{\underline{0.107}}$
$P(\{X = 9\}) = 10p^9(1 - p) = 10 \cdot 0.8^9 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.268}}$

(b) Det kan være fristende for selskapet og selge flere biletter enn det er plasser på flyet, og håpe at ikke alle møter opp. En flybilett koster 1000 kr. Dersom en passasjer møter opp og ikke får plass på flyet regner selskapet med og må ut med 3000 kr i erstatning til passasjeren.

La Y være summen av eventuelle erstatninger.

(i) Anta at selskapet selger 11 biletter. Beregn $E(Y)$.
(ii) Anta at selskapet selger 12 biletter. Beregn $E(Y)$.
(iii) Bør selskapet selge 10 , 11, 12 eller 13 biletter dersom det ønsker og maksimere forventingen til nettoinntekten, $Z = 1000n - Y$, der n er antall solgte biletter.

Løsning. (i) $E(Y) = p(11) \cdot 3000 = 0.085 \cdot 3000 = \underline{\underline{255.0}} \implies$
$E(Z) = 11000 - 255.0 = \underline{\underline{10745.0}}$
(ii) $E(Y) = p(11) \cdot 3000 + p(12) \cdot 6000 = 0.206 \cdot 3000 + 0.068 \cdot 6000 = \underline{\underline{1026.0}} \implies$
$E(Z) = 12000 - 1026.0 = \underline{\underline{10974.0}}$
(iii) $E(Y) = p(11) \cdot 3000 + p(12) \cdot 6000 + p(13) \cdot 9000 =$
$0.268 \cdot 3000 + 0.178 \cdot 6000 + 0.054 \cdot 9000 = \underline{\underline{2358.0}} \implies$
$E(Z) = 13000 - 2358.0 = \underline{\underline{10642.0}}$
Flyselskapet bør selge 12 billetter.

Oppgave 4

To stokastiske variabler X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet f gitt ved:
$f(x,y) = \frac{1}{48}(8 - 2x^2 - bxy - y^2)$ dersom $-1 \leq x \leq 1$ og $-2 \leq y \leq 2$. $f(x,y) = 0$ ellers.
Her er b en konstant $0 \leq b \leq 1$

(a) Finn $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

Løsning. $f_X(x) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{48}(8 - 2x^2 - bxy - y^2)dy = \underline{\underline{\frac{5}{9} - \frac{1}{6}x^2}}$

(b) Beregn $E(X^2)$

Løsning. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(\frac{5}{9} - \frac{1}{6}x^2)dx = \underline{\underline{\frac{41}{135}}}$

(c) Beregn kovariansen mellom X og Y uttrykt ved b.

Løsning. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} xy\frac{1}{48}(8 - 2x^2 - bxy - y^2)dxdy = \underline{\underline{-\frac{2}{27}b}}$

Opplysninger: $E(X) = 0$ $E(Y) = 0$

Oppgave 5

Estimer β_0, β_1 og β_2 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2, (x_{11}, x_{12}) = (0, 1) \\
y_2 &= 0, (x_{21}, x_{22}) = (-1, 0) \\
y_3 &= 1, (x_{31}, x_{32}) = (0, 0) \\
y_4 &= -1, (x_{41}, x_{42}) = (-2, 1)
\end{aligned}
$$

Du får oppgitt at

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}
$$

Løsning.

$$
X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige. Kan vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

uttrykkes som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$? Begrunn svarene.

Løsning.

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige. Dette betyr at likningssystemet

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

har en entydig løsning. (Evt. bemerk at $u = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$)

Oppgave 7

Ta utganspunkt i funksjonen:

$$f(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 8x_2 + 1$$

Skriv f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der A er en symmetrisk 2×2-matrise og B er en 1×2-matrise, og finn vektoren $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$. Finn egenverdiene til A og avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv definitt.

Løsning. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}$, $c = 1$

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = 2\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2x_2 - 8x_1 + 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0 \implies$

$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{29} - \frac{3}{2} = 1.1926$ eller $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{29} - \frac{3}{2} = -4.1926$. Siden ikke begge er positive, er $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ <u>ikke positiv definitt</u>.

Oppgave 8

Gå nå ut fra at A er en 3×3-matrise, og at det finnes en invertibel matrise P slik at

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finn egenverdiene til A.

Løsning. $|P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = |A - \lambda I|$. Derfor er egenverdiene til A og $P^{-1}AP$ de samme altså, <u>1, 2 og 3</u>

BI HANDELSHØYSKOLEN Institutt for samfunnsøknomi

Sensorveiledning i: **MET 22141 Matematikk valgfag**

Eksamensdato: 19.05.10, kl 09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler + eksamenskalkulator TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus^{TM}

Innføringsark: Ruteark

Totalt antall sider: 6

Oppgave 1

(a)

$$y\dot{y} = t \qquad y\frac{dy}{dt} = t \qquad ydy = tdt \qquad \int ydy = \int tdt$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C^* \qquad y^2 = t^2 + C$$

$$y = -\sqrt{t^2 + C} \qquad \text{eller} \quad y = \sqrt{t^2 + C}$$

(b)

$$t\dot{y} + y = e^t \qquad \dot{y} + \frac{1}{t}y = \frac{e^t}{t}$$

Integrerende faktor er $e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\ln|t|}$ Da vi skal finne løsningen som tilfredstiller $y(1) = e$ kan vi forutsette at $t > 0$. Integrerende faktor blir da $e^{\ln t} = t$

Vi må derfor løse $\dot{(yt)} = \frac{e^t}{t} \cdot t = e^t$ $\qquad yt = \int e^t dt = e^t + C$

$y = \frac{e^t}{t} + \frac{C}{t}$ $\quad y(1) = e + C = e$ medfører at $C = 0$ Det vil si $y = \frac{e^t}{t}$

(c) $\ddot{y} - 16\dot{y} + 64y = 1$

Likningen $r^2 - 16r + 64 = 0$ har løsningen $r = 8$

Den homogene løsningen er derfor på formen $y = (At + B)e^{8t}$

En spesiell løsning vil være $y_p = \frac{1}{64}$ Den generelle løsningen blir derfor

$y = (At + B)e^{8t} + \frac{1}{64}$ $\quad y(0) = B + \frac{1}{64} = 0$ Herav følger $B = -\frac{1}{64}$

$y = (At - \frac{1}{64})e^{8t} + \frac{1}{64}$ $\quad \dot{y} = Ae^{8t} + (At - \frac{1}{64})e^{8t} \cdot 8$ $\quad \dot{y}(0) = A - \frac{8}{64} = 1$

Herav følger $A = \frac{9}{8}$ Løsningen er $y = (\frac{9}{8}t - \frac{1}{64})e^{8t} + \frac{1}{64}$

Oppgave 2

$$\max/\min \int_0^1 (y\dot{y} + e^y\dot{y} + e^{\dot{y}})dt, \quad y(0) = 0 \text{ og } y(1) = 1.$$

(a) $F(t, y, \dot{y}) = y\dot{y} + e^y\dot{y} + e^{\dot{y}}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \dot{y} + e^y\dot{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = y + e^y + e^{\dot{y}} \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) = \frac{d}{dt}(y + e^y + e^{\dot{y}}) = \dot{y} + e^y\dot{y} + e^{\dot{y}}\ddot{y}$

Euler : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) = \dot{y} + e^y\dot{y} - (\dot{y} + e^y\dot{y} + e^{\dot{y}}\ddot{y}) = -e^{\dot{y}}\ddot{y} = 0$

Herav følger at $\ddot{y} = 0 \quad \dot{y} = C_1 \quad y = C_1t + C_2$

(b) $y(0) = C_2 = 0 \quad y(1) = C_1 + C_2 = C_1 = 1$ Løsning $y = t$.

Oppgave 3

La X være antall konkuranser som han vinner. La Y være total gevinst.

(a) X er binomisk fordelt.

(b) $P(X = 2) = \binom{3}{2} 0.15^2 \cdot 0.85 = 0.0574$

(c) $E(X) = np = 3 \cdot 0.15 = 0.45 \quad E(Y) = E(8000X) = 8000 \cdot 0.45 = 3600$

(d) $Var(X) = np(1-p) = 3 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 0.3825 \quad Var(Y) = 8000^2 \cdot Var(X) = 8000^2 \cdot 0.3825 = 24480000$

(e) La s_i stå for begivenheten at han vinner konkuranse nr i ,$i = 1, 2, 3$

La f_i stå for begivenheten at han ikke vinner konkuranse nr i

$P(X = 0) = P(f_1f_2f_3) = (1 - 0.2)(1 - 0.3)(1 - 0.4) = 0.3360$

$P(X = 1) = P(s_1f_2f_3) + P(f_1s_2f_3) + P(f_1f_2s_3) =$

$0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.4 = 0.4520$

$P(X = 2) = P(s_1s_2f_3) + P(s_1f_2s_3) + P(f_1s_2s_3) =$

$0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.1880$

$P(X = 3) = P(s_1s_2s_3) = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.0240$

Kontroll: $0.3360 + 0.4520 + 0.1880 + 0.0240 = 1.0$

$E(X) = 0 \cdot 0.3360 + 1 \cdot 0.4520 + 2 \cdot 0.1880 + 3 \cdot 0.0240 = 0.9$

Oppgave 4

$f(x) = e^{-x}$ når $x \geq 0 \qquad f(x) = 0$ ellers

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} =$

$[-\frac{1}{e^x}]_0^{\infty} = -0 + 1 = 1$

Benytter delvis integrasjon:

$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = [x(-e^{-x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-x})dx = (0-0) + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = [x^2(-e^{-x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x(-e^{-x})dx = 0 + \int_0^{\infty} 2xe^{-x}dx =$
$2\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 2 \cdot 1 = 2$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right)^2 = 2 - 1^2 = 1$

Oppgave 5

(a)

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(xe^{-x}e^{-y} + ye^{-x}e^{-y})dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} (xe^{-x}e^{-y} + ye^{-x}e^{-y})dy =$$

$$\frac{1}{2}(\int_0^{\infty} (xe^{-x}e^{-y}dy + \int_0^{\infty} ye^{-x}e^{-y}dy) =$$

$$\frac{1}{2}xe^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}dy + \frac{1}{2}e^{-x}\int_0^{\infty} ye^{-y})dy =$$

$$\frac{1}{2}xe^{-x} \cdot 1 + \frac{1}{2}e^{-x} \cdot 1) = \frac{1}{2}(xe^{-x} + e^{-x})$$

(b)

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x(xe^{-x} + e^{-x})dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^2e^{-x} + xe^{-x})dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{2}$$

(c)

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\frac{1}{2}(xe^{-x} + e^{-x})dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(xe^{-x} + e^{-x})dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^3e^{-x} + x^2e^{-x})dx = \frac{1}{2}(\int_0^{\infty} (x^3e^{-x}dx + \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx) =$$

$$\frac{1}{2}(6+2) = \frac{8}{2} = 4$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

(d)

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy(\frac{1}{2}(xe^{-x}e^{-y} + ye^{-x}e^{-y})dxdy$$

Vi tar en integrasjon av gangen

$$\int_0^\infty xy\frac{1}{2}(xe^{-x}e^{-y} + ye^{-x}e^{-y})dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2ye^{-x}e^{-y} + xy^2e^{-x}e^{-y})dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2ye^{-x}e^{-y}dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty xy^2e^{-x}e^{-y}dx =$$

$$\frac{1}{2}ye^{-y}\int_0^\infty x^2e^{-x}dx + \frac{1}{2}y^2e^{-y}\int_0^\infty xe^{-x}dx =$$

$$\frac{1}{2}ye^{-y}\cdot 2 + \frac{1}{2}y^2e^{-y}\cdot 1 = ye^{-y} + \frac{1}{2}y^2e^{-y}$$

Integrerer vi dette med hensyn på y får vi:

$$\int_0^\infty \left[ye^{-y} + \frac{1}{2}y^2e^{-y}\right]dy = (1 + \frac{1}{2}\cdot 2) = 2$$

(e)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

Oppgave 6

(a) Regresjonskoeffisientene er $\widehat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TY$

Nå er $X^TX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$(X^TX)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$X^TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TY = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7

$$|v_1, v_2, v_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & h \\ 1 & h & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -h^2 + 4h - 12$$

Jeg må vise $-h^2 + 4h - 12 \neq 0$ for alle verdier av h.

Forsøker vi å løse likningen $-h^2+4h-12 = 0$ får vi $h = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot(-1)(-12)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{-2}$

Da vi får noe negativt under kvadratroten har likningen ingen løsning.

Oppgave 8

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1$$

Finner først matrisen A . På diagonalen vil verdiene være koeffisientene forran x_1^2 x_2^2 og x_3^2 . Slik at $a_{11} = 3$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 3$. For de øvrige posisjonene i matrisen A blir verdien halvparten av den tilsvarene koeffisienten slik at

$a_{12} = a_{21} = \frac{2}{2} = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + B^T. = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2 \\ 6x_3 + 4 \end{pmatrix}$$

For å finne egenverdiene til A løser vi likningen

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - (3-\lambda) = (3-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 1) =$

$(3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2)=0$ som har de tre positive løsningene

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2-\sqrt{2} \quad \lambda_3 = 2+\sqrt{2}$.

Den kvadratiske formen er positiv definitt.

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

Løsninger i:	**MET 22141 Matematikk valgfag**
Dato:	16.06.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	5

Oppgave 1.

(a) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det(T) \neq 0$. Vi regner ut

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = 1 \cdot (2h - 1) - h \cdot (3h - h) + 1 \cdot (3 - 2h) = -2h^2 + 2$$

Dermed er vektorene lineært avhengige når $-2h^2 + 2 = 0$, det vil si når $h = \pm 1$, og vektorene er lineært uavhengige når $\underline{\underline{h \neq \pm 1}}$.

(b) Vi ser på matrisen med vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ som kolonner:

$$\begin{pmatrix} T\mathbf{v}_1 & T\mathbf{v}_2 & T\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot T = T^2$$

Når $h = 2$ har denne matrisen determinant

$$\det(T^2) = \det(T)^2 = (-2h^2 + 2)^2 = 36 \neq 0$$

Dermed er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ <u>lineært uavhengige</u> når $h = 2$.

Oppgave 2.

(a) Den karakterstiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = 3$, $\lambda = 6$, og dette viser at <u>$\lambda = 3$ er en egenverdi</u> og at de andre egenverdiene kun er $\underline{\underline{\lambda = 6}}$.

(b) Vi har at

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 29 & 7 & -13 \\ 7 & 11 & -5 \\ -13 & -5 & 17 \end{pmatrix}}}$$

Siden

$$\det(B) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = 54^2 \neq 0$$

så følger det at B er <u>invertibel</u>. Videre har vi

$$B^{-1} = (A^T A)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T$$

Vi regner ut A^{-1} ved hjelp av den adjungerte matrisen:

$$A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$B^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -3 & 18 & 3 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{54}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Alternativt kunne vi beregnet $\det(B)$ og B^{-1} direkte, uten å gå veien om A.

(c) Vi har at de stasjonære punktene for f er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2B\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^{-1}\begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

siden B er invertibel.

(d) Når vi setter $y = A\mathbf{x}$, så har vi

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} \geq 0$$

siden $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq 0$. Dermed er den kvadratiske formen positiv semidefinit. Siden $\det(B) = 54^2 \neq 0$, så er ingen av egenverdiene til B null, og dermed er den kvadratiske formen til B også $\underline{\underline{\text{positiv definit}}}$.

OPPGAVE 3.

(a) Differensiallikningen $y'' + 3y' - 28y = 14$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' + 3y' - 28y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 3r - 28 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 4, -7$$

Dette gir $y_h = C_1e^{4t} + C_2e^{-7t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med A konstant, som gir

$$-28A = 14 \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = C_1e^{4t} + C_2e^{-7t} - 1/2$. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, og det gir

$$C_1 + C_2 - 1/2 = 2,\ 4C_1 - 7C_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = 1$$

Dermed er løsningen $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}e^{4t} + e^{-7t} - \frac{1}{2}}}$.

(b) Differensiallikningen $y' + 2e^t y = e^t$ er lineær, og vi finner integrerende faktor u:

$$\int 2e^t\,\mathrm{d}t = 2e^t + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{2e^t}$$

Vi multipliserer differensiallikningen med integrerende faktor u og får

$$y' + 2e^t y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad \left(ye^{2e^t}\right)' = e^t e^{2e^t}$$

Integrasjon og divisjon med u gir generell løsning

$$ye^{2e^t} = \int e^t e^{2e^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2e^t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} + Ce^{-2e^t}$$

Vi setter inn initialbetingelsen $y(0) = 1$, og dette gir

$$1 = \frac{1}{2} + Ce^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}e^2$$

Dermed blir løsningen $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}(1 + e^{2-2e^t})}}$.

(c) Differensiallikningen $ty' = 1 + t + y + ty = (1+t)(1+y)$ er separabel, og den separerte formen av likningen blir

$$\frac{1}{1+y}\,y' = \frac{1+t}{t} = \frac{1}{t} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{t} + 1\right)\,\mathrm{d}t$$

Integrasjon gir dermed

$$\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{t} + 1\right)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \ln|1+y| = \ln|t| + t + C$$

Vi løser for y og får

$$1 + y = \pm e^{\ln|t| + t + C} = Kte^t \quad \Leftrightarrow \quad y = Kte^t - 1$$

der $K = \pm e^C$. Vi setter inn for initialbetingelsen $y(1) = 1$, som gir $1 = Ke - 1$ og dermed $K = 2/e$. Løsningen er derfor $\underline{\underline{y = 2te^{t-1} - 1}}$.

Oppgave 4.

(a) Variasjonsproblemet blir

$$\underline{\underline{\min \int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt}\,\mathrm{d}t, \quad y(0) = 0,\ y(4) = 30}}$$

der r og K er positive konstanter, med $F(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2 e^{-rt}$. Vi undersøker om F er konveks funksjon i $(y, \dot{y})$: Vi har $F'_y = 0$ og $F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt}$, og dermed får vi

$$F''_{yy} = F''_{y\dot{y}} = 0, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = 2Ke^{-rt} > 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{yy}F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$$

Dette betyr at F er konveks som funksjon i $(y, \dot{y})$, og derfor er enhver løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene en løsning av variasjonsproblemet.

(b) Vi finner Euler-likningen ved å regne ut

$$F'_y = 0, \quad F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F'_{\dot{y}} = 2K\ddot{y}e^{-rt} + 2K\dot{y}e^{-rt}(-r) = 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y})$$

Dermed er Euler-likningen gitt ved

$$0 - 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - r\dot{y} = 0$$

Vi får at $y = Ae^{rt} + B$ siden Euler-likningen er en homogen andre ordens lineær differensial-likning. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 0$, $y(4) = 30$, og dette gir

$$A + B = 0,\ Ae^{4r} + B = 30 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{30}{e^{4r} - 1}, B = -\frac{30}{e^{4r} - 1}$$

Løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene er dermed

$$\underline{\underline{y^* = \frac{30}{e^{4r} - 1}\left(e^{rt} - 1\right)}}$$

Den totale neddiskonterte kostnaden når $y = y^*(t)$ blir

$$\int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^4 K\left(\frac{30re^{rt}}{e^{4r} - 1}\right)^2 e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \frac{900Kr^2}{(e^{4r} - 1)^2}\left[\frac{e^{rt}}{r}\right]_0^4 = \frac{900Kr}{e^{4r} - 1}$$

Når $r = 0.08$ og $K = 10.000$, blir den totale neddiskonterte kostnaden $\frac{900Kr}{e^{4r}-1} \simeq \underline{\underline{1.909.167}}$.

Oppgave 5.

(a) Vi har at $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$ siden X og Y er uavhengige, så

$$P(X=x, Y=y) = e^{-2}\frac{2^x}{x!} \cdot e^{-1}\frac{1^y}{y!} = \underline{\underline{e^{-3}\frac{2^x}{x!y!}}}$$

Innsetting gir $P(0-0) = e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0498}}$, $P(1-0) = 2e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0996}}$, $P(2-1) = 2e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0996}}$.

(b) Vi har at $P(X=Y, X \leq 4) = P(0-0) + \cdots + P(4-4)$, så

$$P(X=Y, X \leq 4) = e^{-3}(1+2+1+2/9+1/36) = 4.25e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.2116}}$$

Dette er sannsynligheten for et uavgjort resultat med maksimalt fire mål til hjemmelaget.

(c) Vi har $P(X=Y|X \leq 4) = P(X=Y, X \leq 4)/P(X \leq 4)$. Siden

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + \cdots + P(X=4) = e^{-2}(1+2+2+4/3+2/3) = 7e^{-2}$$

så får vi

$$P(X=Y|X \leq 4) = \frac{4.25e^{-3}}{7e^{-2}} \simeq \underline{\underline{0.2234}}$$

(d) Vi har $P(X+Y \geq 2) = 1 - P(X+Y < 2)$ og

$$P(X+Y<2) = P(0-0) + P(1-0) + P(0-1) = 4e^{-3}$$

så $P(X+Y \geq 2) = 1 - 4e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.8009}}$. La Z være netto utbetaling i veddemålet. Da har vi

$$Z = \begin{cases} dI - I & X+Y \geq 2 \\ -I & X+Y < 2 \end{cases}$$

der I er innsatsen. Setter vi $p = P(X+Y \geq 2) \simeq 0.8009$, finner vi at forventet netto utbetaling blir

$$E[Z] = (dI - I)p + (-I)(1-p) = dIp - I = I(dp-1)$$

Veddemålet gir forventet netto innbetaling om $E[Z] < 0$, dvs $dp - 1 < 0$ eller $d < 1/p \simeq 1.2487$. Altså lønner det seg å tilby veddemålet om $\underline{\underline{d < 1.2487}}$.

Oppgave 6.

(a) Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y = \left[x(x^2+y^2)^2\right]_0^1 = x(x^2+1)^2 - x^5 = \underline{\underline{2x^3+x}}$$

Vi har $f(x,y) \geq 0$ for alle x, y, og regner ut

$$\int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^3+x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

Dermed følger det at $f(x,y)$ er en sannsynlighetstetthet.

(b) Vi regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(2x^3+x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(2x^3+x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{41}{900}}}$$

(c) Siden $f(a,b) = f(b,a)$ for alle reelle tall a, b (symmetri om linjen $y = x$), så kan vi bytte om rollene til x og y uten at integralet endrer verdi:

$$E[X^n] = \int\int x^n f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\int y^n f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int y^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = E[Y^n]$$

Dermed er $E[X^n] = E[Y^n]$ for alle $n \geq 1$. Da har vi

$$E[Y] = E[X] = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}, \quad \mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{Var}[X] = \underline{\underline{\frac{41}{900}}}$$

(d) Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 (4x^4y^2 + 4x^2y^4)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 4x^4 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 4x^2 \left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{5}x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{15}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{8}{15}}} \end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{15} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{225}}}$.

(e) Vi har at

$$\begin{aligned} P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2) &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 (4x^3y + 4xy^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^1 4x^3 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{1/2}^1 + 4x \left[\frac{1}{4}y^4\right]_{1/2}^1 \mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{15}{16}x\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{32}x^2\right]_{1/2}^1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{15}{16} + \frac{15}{32} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{45}{64}}} \end{aligned}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

Løsninger i:	**ELE 37191 Matematikk valgfag**
Dato:	16.06.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	5

Oppgave 1.

(a) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det(T) \neq 0$. Vi regner ut

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = 1 \cdot (2h - 1) - h \cdot (3h - h) + 1 \cdot (3 - 2h) = -2h^2 + 2$$

Dermed er vektorene lineært avhengige når $-2h^2 + 2 = 0$, det vil si når $h = \pm 1$, og vektorene er lineært uavhengige når $\underline{\underline{h \neq \pm 1}}$.

(b) Vi ser på matrisen med vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ som kolonner:

$$\begin{pmatrix} T\mathbf{v}_1 & T\mathbf{v}_2 & T\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot T = T^2$$

Når $h = 2$ har denne matrisen determinant

$$\det(T^2) = \det(T)^2 = (-2h^2 + 2)^2 = 36 \neq 0$$

Dermed er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ $\underline{\underline{\text{lineært uavhengige}}}$ når $h = 2$.

Oppgave 2.

(a) Den karakterstiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = 3$, $\lambda = 6$, og dette viser at $\underline{\underline{\lambda = 3 \text{ er en egenverdi}}}$. Alternativt kan man vise at $\lambda = 3$ er en egenverdi ved å sjekke at $\det(A - 3I) = 0$. Vi regner ut egenvektorene til A med egenverdi $\lambda = 3$ ved å løse likningssystemet

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at at andre likning er irrelevant og kan tas bort, og at tredje likning er første likning multiplisert med -1, og dermed også irrelevant. Derfor kan vi velge $y = s$ og $z = t$ som frie parametre, og når vi løser første likning for x får vi

$$2x = -y + z \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$$

Vi får dermed at egenvektorene for $\lambda = 3$ kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} s + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t}}$$

(b) Vi har at

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 29 & 7 & -13 \\ 7 & 11 & -5 \\ -13 & -5 & 17 \end{pmatrix}}}$$

Siden

$$\det(B) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = 54^2 = 2916 \neq 0$$

så følger det at B er $\underline{\underline{\text{invertibel}}}$. Videre har vi

$$B^{-1} = (A^T A)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T$$

Vi regner ut A^{-1} ved hjelp av den adjungerte matrisen:

$$A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$B^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -3 & 18 & 3 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{54}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Alternativt kunne vi beregnet $\det(B)$ og B^{-1} direkte, uten å gå veien om A.

(c) Vi har at de stasjonære punktene for f er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2B\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^{-1}\begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

siden B er invertibel.

(d) Når vi setter $y = A\mathbf{x}$, så har vi

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} \geq 0$$

siden $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq 0$. Dermed er den kvadratiske formen positiv semidefinit. Siden $\det(B) = 54^2 \neq 0$, så er ingen av egenverdiene til B null, og dermed er den kvadratiske formen til B også $\underline{\underline{\text{positiv definit}}}$.

Oppgave 3.

(a) Differensiallikningen $y'' + 3y' - 28y = 14$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' + 3y' - 28y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 3r - 28 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 4, -7$$

Dette gir $y_h = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med A konstant, som gir

$$-28A = 14 \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t} - 1/2$. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, og det gir

$$C_1 + C_2 - 1/2 = 2,\ 4C_1 - 7C_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = 1$$

Dermed er løsningen $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}e^{4t} + e^{-7t} - \frac{1}{2}}}$.

(b) Differensiallikningen $y' + 2e^t y = e^t$ er lineær, og vi finner integrerende faktor u:

$$\int 2e^t \, \mathrm{d}t = 2e^t + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{2e^t}$$

Vi multipliserer differensiallikningen med integrerende faktor u og får

$$y' + 2e^t y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad \left(ye^{2e^t}\right)' = e^t e^{2e^t}$$

Integrasjon og divisjon med u gir generell løsning

$$ye^{2e^t} = \int e^t e^{2e^t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2e^t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} + Ce^{-2e^t}$$

Vi setter inn initialbetingelsen $y(0) = 1$, og dette gir

$$1 = \frac{1}{2} + Ce^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}e^2$$

Dermed blir løsningen $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}(1 + e^{2-2e^t})}}$.

(c) Differensiallikningen $ty' = 1 + t + y + ty = (1+t)(1+y)$ er separabel, og den separerte formen av likningen blir

$$\frac{1}{1+y} y' = \frac{1+t}{t} = \frac{1}{t} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+y} \mathrm{d}y = \left(\frac{1}{t} + 1\right) \mathrm{d}t$$

Integrasjon gir dermed

$$\int \frac{1}{1+y} \mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{t} + 1\right) \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \ln|1+y| = \ln|t| + t + C$$

Vi løser for y og får

$$1 + y = \pm e^{\ln|t| + t + C} = Kte^t \quad \Leftrightarrow \quad y = Kte^t - 1$$

der $K = \pm e^C$. Vi setter inn for initialbetingelsen $y(1) = 1$, som gir $1 = Ke - 1$ og dermed $K = 2/e$. Løsningen er derfor $\underline{\underline{y = 2te^{t-1} - 1}}$.

OPPGAVE 4.

(a) Variasjonsproblemet blir

$$\underline{\underline{\min \int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt} \, \mathrm{d}t, \quad y(0) = 0, \; y(4) = 30}}$$

der r og K er positive konstanter, med $F(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2 e^{-rt}$. Vi undersøker om F er konveks funksjon i $(y, \dot{y})$: Vi har $F'_y = 0$ og $F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt}$, og dermed får vi

$$F''_{yy} = F''_{y\dot{y}} = 0, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = 2Ke^{-rt} > 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{yy}F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$$

Dette betyr at F er konveks som funksjon i $(y, \dot{y})$, og derfor er enhver løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene en løsning av variasjonsproblemet.

(b) Vi finner Euler-likningen ved å regne ut

$$F'_y = 0, \quad F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F'_{\dot{y}} = 2K\ddot{y}e^{-rt} + 2K\dot{y}e^{-rt}(-r) = 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y})$$

Dermed er Euler-likningen gitt ved

$$0 - 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - r\dot{y} = 0$$

Vi får at $y = Ae^{rt} + B$ siden Euler-likningen er en homogen andre ordens lineær differensiallikning. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 0$, $y(4) = 30$, og dette gir

$$A + B = 0, \; Ae^{4r} + B = 30 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{30}{e^{4r} - 1}, B = -\frac{30}{e^{4r} - 1}$$

Løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene er dermed

$$\underline{\underline{y^* = \frac{30}{e^{4r} - 1}\left(e^{rt} - 1\right)}}$$

Den totale neddiskonterte kostnaden når $y = y^*(t)$ blir

$$\int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt}\,\mathrm{dt} = \int_0^4 K\left(\frac{30re^{rt}}{e^{4r}-1}\right)^2 e^{-rt}\,\mathrm{dt} = \frac{900Kr^2}{(e^{4r}-1)^2}\left[\frac{e^{rt}}{r}\right]_0^4 = \frac{900Kr}{e^{4r}-1}$$

Når $r = 0.08$ og $K = 10.000$, blir den totale neddiskonterte kostnaden $\frac{900Kr}{e^{4r}-1} \simeq \underline{\underline{1.909.167}}$.

OPPGAVE 5.

(a) Vi har at $P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)$ siden X og Y er uavhengige, så

$$P(X = x, Y = y) = e^{-2}\frac{2^x}{x!} \cdot e^{-1}\frac{1^y}{y!} = \underline{\underline{e^{-3}\,\frac{2^x}{x!y!}}}$$

Innsetting gir $P(0-0) = e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0498}}$, $P(1-0) = 2e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0996}}$, $P(2-1) = 2e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0996}}$.

(b) Vi har at $P(X = Y, X \leq 4) = P(0-0) + \cdots + P(4-4)$, så

$$P(X = Y, X \leq 4) = e^{-3}(1 + 2 + 1 + 2/9 + 1/36) = 4.25e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.2116}}$$

Dette er sannsynligheten for et uavgjort resultat med maksimalt fire mål til hjemmelaget.

(c) Vi har $P(X = Y | X \leq 4) = P(X = Y, X \leq 4)/P(X \leq 4)$. Siden

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 4) = e^{-2}(1 + 2 + 2 + 4/3 + 2/3) = 7e^{-2}$$

så får vi

$$P(X = Y | X \leq 4) = \frac{4.25e^{-3}}{7e^{-2}} \simeq \underline{\underline{0.2234}}$$

(d) Vi har $P(X + Y \geq 2) = 1 - P(X + Y < 2)$ og

$$P(X + Y < 2) = P(0-0) + P(1-0) + P(0-1) = 4e^{-3}$$

så $P(X + Y \geq 2) = 1 - 4e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.8009}}$. La Z være netto utbetaling i veddemålet. Da har vi

$$Z = \begin{cases} dI - I & X + Y \geq 2 \\ -I & X + Y < 2 \end{cases}$$

der I er innsatsen. Setter vi $p = P(X+Y \geq 2) \simeq 0.8009$, finner vi at forventet netto utbetaling blir

$$E[Z] = (dI - I)p + (-I)(1-p) = dIp - I = I(dp - 1)$$

Veddemålet gir forventet netto innbetaling om $E[Z] < 0$, dvs $dp - 1 < 0$ eller $d < 1/p \simeq 1.2487$. Altså lønner det seg å tilby veddemålet om $\underline{\underline{d < 1.2487}}$.

OPPGAVE 6.

(a) Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \left[x(x^2 + y^2)^2\right]_0^1 = x(x^2+1)^2 - x^5 = \underline{\underline{2x^3 + x}}$$

Vi har $f(x, y) \geq 0$ for alle x, y, og regner ut

$$\int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

Dermed følger det at $f(x, y)$ er en sannsynlighetstetthet.

(b) Vi regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(2x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(2x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{41}{900}}}$$

(c) Siden $f(a,b) = f(b,a)$ for alle reelle tall a, b (symmetri om linjen $y = x$), så kan vi bytte om rollene til x og y uten at integralet endrer verdi:

$$E[X^n] = \int\int x^n f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\int y^n f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int y^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = E[Y^n]$$

Dermed er $E[X^n] = E[Y^n]$ for alle $n \geq 1$. Da har vi

$$E[Y] = E[X] = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}, \quad \mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{Var}[X] = \underline{\underline{\frac{41}{900}}}$$

(d) Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1\int_0^1 xy \cdot 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 (4x^4y^2 + 4x^2y^4)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 4x^4\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 4x^2\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{5}x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{15}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{15} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{225}}}$.

(e) Vi har at

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2) &= \int_{1/2}^1\int_{1/2}^1 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1\int_{1/2}^1 (4x^3y + 4xy^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^1 4x^3\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{1/2}^1 + 4x\left[\frac{1}{4}y^4\right]_{1/2}^1\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1\left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{15}{16}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{32}x^2\right]_{1/2}^1 = \frac{3}{8}\cdot\frac{15}{16} + \frac{15}{32}\cdot\frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{45}{64}}}
\end{aligned}$$

HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi
Kontinuasjon

Løsninger i:	**ELE 37191 Matematikk valgfag**
Eksamensdato:	28.11.2011, 14:00 – 19:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	4

OPPGAVE 1.

(a) Vi har at $P(X < Y) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = \mathbf{0.45}$.

(b) Vi har at $P(Y = 1) = 0.45,\ P(Y = 2) = 0.30,\ P(Y = 3) = 0.25$. Dermed får vi

$$E[Y^n] = 1^n \cdot 0.45 + 2^n \cdot 0.30 + 3^n \cdot 0.25$$

Dette gir $E[Y] = \mathbf{1.80}$ og $E[Y^2] = 3.90$, og dermed er

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 3.90 - 1.80^2 = \mathbf{0.66}$$

(c) Vi har $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$, og vi ser at

$$E[X] = 1 \cdot 0.60 + 2 \cdot 0.40 = 1.40$$

og at

$$E[XY] = 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot (0.20 + 0.25) + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.10 + 6 \cdot 0.05 = 2.4$$

Dermed er $\text{Cov}[X, Y] = 2.4 - 1.8 \cdot 1.4 = \mathbf{-0.12}$. Variablene ikke uavhengige.

OPPGAVE 2.

(a) Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2 - 2xy + y^2)\,\mathrm{d}y = k\left[x^2y - xy^2 + y^3/3\right]_0^1 = \mathbf{k(x^2 - x + 1/3)}$$

Siden f er en sannsynlighetstetthet, må vi ha

$$\int_0^1 k(x^2 - x + 1/3)\,\mathrm{d}x = k\left[x^3/3 - x^2/2 + x/3\right]_0^1 = k(1/3 - 1/2 + 1/3) = k/6 = 1$$

Det følger at $k = \mathbf{6}$. (Vi har at $f(x, y) = k(x^2 - 2xy + y^2) = k(x - y)^2 \geq 0$, så $k = 6$ gjør f til en sannsynlighetstetthet.)

(b) Vi regner ut den kumulative fordelingen $F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b)$ for $0 \leq a \leq 1$ og $0 \leq b \leq 1$ ved å regne ut integralet

$$\begin{aligned}
P(X \leq a, Y \leq b) &= \int_0^a \int_0^b 6x^2 - 12xy + 6y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a 6x^2\,[y]_0^b - 12x\,[y^2/2]_0^b + [2y^3]_0^b\,\mathrm{d}x = \int_0^a 6x^2b - 6xb^2 + 2b^3\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x^3b - 3x^2b^2 + 2b^3x\right]_0^a = \mathbf{2a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^3}
\end{aligned}$$

(c) Vi bruker $f_X(x) = 6x^2 - 6x + 2$ og regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(6x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{4}x^4 - 3x^2 + 2x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 3 + 2 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(6x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{6}{5} - \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{30}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{11}{30} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{7}{60}}$$

(d) Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^1\int_0^1 xy\cdot(6x^2 - 12xy + 6y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 (6x^3y - 12x^2y^2 + 6xy^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 6x^3\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 - 12x^2\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 6x\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{-\frac{1}{12}}$ siden $E[Y] = E[X]$ ved symmetri.

(e) Vi har at

$$\begin{aligned} P(X \geq 1/2, Y \leq 1/2) &= \int_{1/2}^1\int_0^{1/2} 6x^2 - 12xy + 6y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^1 6x^2\,[y]_0^{1/2} - 12x\,[y^2/2]_0^{1/2} + [2y^3]_0^{1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^1 \left(3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{1/2}^1 \\ &= (1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{8}) = \mathbf{\frac{7}{16}} \end{aligned}$$

Alternativt kan man bruke at sannsynligheten er gitt ved $F(1, 1/2) - F(1/2, 1/2)$ og bruke uttrykket for $F(a, b)$ fra oppgave b).

Oppgave 3.

(a) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ er lineært avhengige hvis og bare hvis minst en av vektorene kan skrives som en lineær-kombinasjon av de tre andre. Vi forsøker å skrive $\mathbf{v}_4 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$:

$$\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\3 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Siden koeffisientmatrisen har determinant

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\3 & -1 & 7\end{vmatrix} = 1(7+1) + 3(0+2) = 14 \neq 0$$

så har likningssystemet en løsning, og dermed er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineært avhengige.

(b) Regningen i oppgave a) viser at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige: Siden determinanten i a) er ulik null, har likningen $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ kun løsningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Oppgave 4.

(a) Vi vet at $\lambda = 2$ er egenverdi for A hvis og bare hvis $\det(A-2I) = 0$. Vi regner ut $\det(A-2I)$:

$$\begin{vmatrix} 4-2 & -1 & 6 \\ 2 & 1-2 & 6 \\ 2 & -1 & 8-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

siden alle radene i matrisen er like. Dette viser at $\lambda = 2$ er en egenverdi for A.

(b) Vi regner ut det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) - 2(-1(8-\lambda)+6) + 2(-6-6(1-\lambda))$$

Vi vet at $\lambda - 2$ er en faktor i det karakteristiske polynomet, og vi forsøker derfor å forenkle og faktorisere polynomet:

$$(4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-7) - 2(\lambda-2) + 12(\lambda-2) = (\lambda-2)\left[(4-\lambda)(\lambda-7) - 2 + 12\right]$$

De andre egenverdiene er derfor gitt ved

$$(4-\lambda)(\lambda-7) - 2 + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^2 + 11\lambda - 18 = 0$$

Dette gir $\lambda = 2$ and $\lambda = 9$. Dermed er alle egenverdiene for A gitt ved

$$\lambda_1 = \mathbf{2},\ \lambda_2 = \mathbf{2},\ \lambda_3 = \mathbf{9}$$

og $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2^2 \cdot 9 = \mathbf{36}$.

Oppgave 5.

(a) Differensiallikningen $y'' + 8y' + 16y = 32$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' + 8y' + 16y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 8r + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -4, -4$$

Dette gir $y_h = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med A konstant, som gir

$$16A = 32 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = \mathbf{C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t} + 2}$.

(b) Differensiallikningen $t^2 y' + 2ty = te^{-t}$ er lineær, og vi ser at venstresiden er $(t^2 y)'$. Dermed får vi

$$t^2 y = \int te^{-t}\,dt = t(-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t})\,dt = -te^{-t} - e^{-t} + C$$

Dette gir

$$y = \frac{\mathbf{-t - 1 + Ce^t}}{\mathbf{t^2 e^t}}$$

Oppgave 6.

(a) Vi bruker $F(t, y, \dot{y}) = (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 16y \cdot e^{-0.08t}, \quad F'_{\dot{y}} = 1250\dot{y} \cdot e^{-0.08t}$$

Euler-likningen blir da:

$$F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = 16y \cdot e^{-0.08t} - 1250(\ddot{y} \cdot e^{-0.08t} + \dot{y}e^{-0.08t}(-0.08)) = 0$$

Division med $e^{-0.08t} \neq 0$ gir likningen

$$16y - 1250(\ddot{y} - 0.08\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$$

(b) Vi løser Euler-likningen $\ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(25) = e^4$. Differensiallikningen har karakteristiske røtter

$$r^2 - 0.08r - 0.0128 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.16, -0.08$$

Dermed er den generelle løsningen $y = C_1 e^{0.16t} + C_2 e^{-0.08t}$. Initialbetingelsene er $C_1 + C_2 = 1$ og $C_1 e^4 + C_2 e^{-2} = e^4$, og vi ser at $C_1 = 1$ og $C_2 = 0$ er løsning. Dermed får vi $y = e^{0.16t}$. Siden $F(t, y, \dot{y})$ er en konveks funksjon i variablene y og $\dot{y}$, så løser $y = e^{0.16t}$ minimumsproblemet. Den minimale verdien av integralet blir dermed

$$\int_0^{25} (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{25} (8 \cdot e^{0.32t} + 625 \cdot 0.16^2 e^{0.32t})e^{-0.08t}\,dt$$

siden $\dot{y} = e^{0.16t} \cdot 0.16 = 0.16e^{0.16t}$. Dette integralet regner vi ut:

$$\int_0^{25} (8 + 16)e^{0.24t}\,\mathrm{d}t = 24\frac{1}{0.24}(e^6 - 1) = \mathbf{100(e^6 - 1)} \simeq 40,243$$