FORELESNING 12

ELE 3719

MATEMATIKK

BI

EIVIND ERIKSEN

FEB 21 2013

PLAN:

1. Lineære likningssystem og Gauss Eliminasjon

Lærebok:

[LSGE] Hele

(Se It's Learning)

Et <u>lineært likningssystem</u> (m likninger, n ukjente) (m×n)

har formen

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

der a_{ij}, b_i er gitte tall.

<u>Eks:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} x+y&=4 \\ x-y&=2 \end{aligned}}$$

2x2

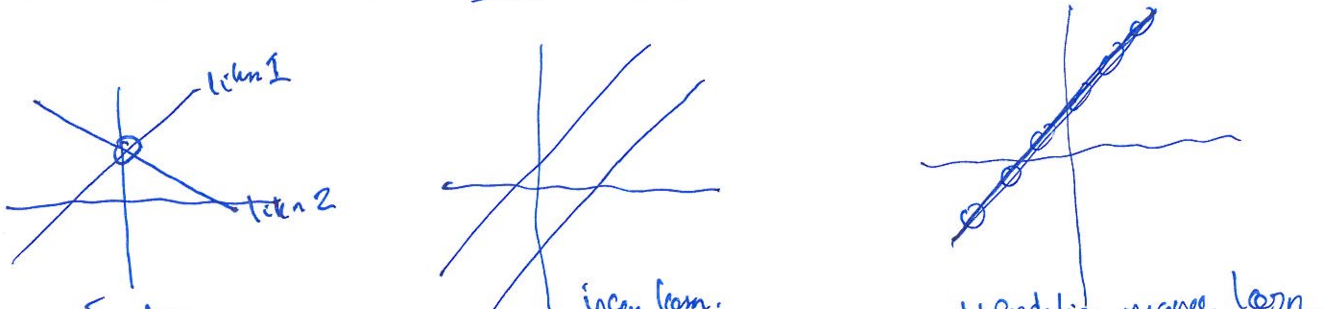
$$\boxed{\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x+2y+4z&=7 \\ x+3y+9z&=13 \end{aligned}}$$

3x3

En <u>løsning</u> er et tuppel $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ som passer i alle likningene i systemet.

<u>Eks:</u>

2x2



én løsn. ingen løsn. uendelig mange løsn.

Et $m \times n$ lineært system har enten

i) én løsning

ii) ingen løsninger

iii) uendelig mange løsninger

Gauss eliminasjon

Eks:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x+2y+4z&=7 \\ x+3y+9z&=13 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

utvidet koeffisientmatrise (augmentert)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \; -1$$

Rad(2) = Rad(2) + (−1)·Rad(1)

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \; -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \; -2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \longleftarrow \text{trappeform}$$

Elementære radoperasjoner

i) Bytte om to rader

ii) Mult. en rad med $c \neq 0$

iii) Legge til $c \cdot$ Rad i i Rad j (der $j \neq i$)

Trappeform:

Ledende koeff = første tall $\neq 0$ i en rad

Trappeform:

– Kun null under hver ledende koeff.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 &&\Rightarrow x+1+1=3 \Rightarrow \underline{x=1}\\ y+3z &= 4 &&\Rightarrow y+3=4 \Rightarrow \underline{y=1}\\ 2z &= 2 &&\Rightarrow \underline{z=1} \end{aligned}$$

Tilbake-substitusjon

Løsning: $\underline{\underline{x=1,\ y=1,\ z=1}}$

$\underline{\underline{(x,y,z)=(1,1,1)}}$

Gauss-Jordan eliminasjon

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3 \\ -1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

redusert trappeform

$$\left.\begin{aligned} x &= 1\\ y &= 1\\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (x,y,z) = \underline{\underline{(1,1,1)}}$$

Redusert trappeform

trappeform slik at

i) alle ledende koeff. er 1

ii) kun null over ledende koeff.

Faktum:

Den reduserte trappeformen er entydig.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - 3y &= 4 \\ 4x - y &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

trappeform med ledende koeff. i siste kolonne

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ -5y &= 0 \\ 0 &= -7 \end{aligned}\right\} \text{ ingen løsning}$$

Merk: Likningssystemet har ingen løsning $\Longleftrightarrow$ det er en ledende koeff. i siste kolonne av trappeformen

Merk: Alle trappeformer til en gitt matrise har ledende koeffisienter i samme posisjoner.

Disse posisjonene kalles **pivot-posisjoner**.

Mao: pivot-posisjoner = de posisjonene der vi har **ledende koeff. i trappeform**

Eks:

$$x+y+z=3$$
$$x+2y+4z=7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

trappeform

$$x+y+z=3$$
$$y+3z=4 \Rightarrow y=\underline{4-3z}$$
$$\Downarrow$$
$$x+(4-3z)+z=3$$
$$x=\underline{2z-1}$$

Løsning:

$$x=2z-1$$
$$y=-3z+4$$
$$z = \text{fri variabel}$$

$$(x,y,z)=\underline{\underline{(2z-1,-3z+4,z)}}$$

(uendelig mange løsn.)

Hvis systemet har løsninger (ingen pivot-posisjon i siste kolonne)

Variable som mangler pivot-posisjon i sin kolonne blir <u>frie variable</u>.

Antall frie variable = antall kolonner til venstre for | som mangler pivot-posisjon. = antall frihetsgrader.

> Minst én fri variabel: <u>uendelig mange løsninger</u>
> Ingen frie variable: Én løsning

<u>Eks:</u>

$$x + 6y - 7z + 3w = 1$$
$$x + 9y - 6z + 4w = 2$$
$$x + 3y - 8z + 4w = 5$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

<u>1 fri variabel</u>: z

DVS 1 frihetsgrad, uendelig mange løsninger.

$$x + 6y - 7z + 3w = 1$$
$$3y + z + w = 1$$
$$2w = 5$$

$3y = 1 - z - w = -3/2 - z$

$w = 5/2$

$w = 5/2$

$y = -1/2 - 1/3\, z$

$x = -7/2 + 9z$

$x = 1 - 6y + 7z - 3w$

$= 1 - 6(-1/2 - 1/3\, z) + 7z$

$- 3 \cdot 5/2$

$= -7/2 + 9z$

Løsninger:

$$x = -7/2 + 9z$$
$$y = -1/2 - 1/3\, z$$
$$z = z \quad \text{(fri)}$$
$$w = 5/2$$

Rk(A) = antall pivotposisjoner i A
(rangen til A)

Hvis et lineært $m \times n$-system har løsninger, så er antall frihetsgrader = antall frie variable

$n - rk(A)$

Et lineært likningssystem kalles homogent hvis $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, dvs

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \qquad = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \qquad = 0 \end{array}\right\}$$

Det har alltid den trivielle løsningen $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.
Hvis det finnes andre løsninger (ikke-trivielle), så har vi minst én fri variabel.

Eks:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= 0 \\ x + 3y + 9z &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

3 pivot posisjoner $\Rightarrow$ ingen frie variabler
(Én løsn = trivielle løsn)