FORELESNING 13

ELE 3719

BI

Eivind Eriksen   Feb 26 2013   Matematikk

Plan:

Matriser og matriseregning, vektorer

Lærebok:

[MKF] 1.1–1.7

En <u>$m \times n$-matrise</u> er en rektangulær tabell (m rader; n kolonner) bestående av tall

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}}\right\} m$$

a_{ij}

elementet i A på plass

rad i, kol. j

Eks: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2×2 3×1

En <u>n-vektor</u> er en $n \times 1$-matrise. Kalles også kolonnevektor.

Matriseoperasjoner:

i) <u>Addisjon / subtraksjon:</u> $\left.\begin{matrix} A+B \\ A-B \end{matrix}\right\}$ definert hvis A og B har samme størrelse

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & \text{[illegible]} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Skalarmultiplikasjon (skalar = tall)

Eks: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

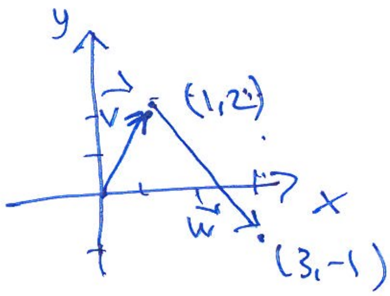
(Merk: det er vanlig å skrive $\underline{v} = \vec{v}$ for vektorer) $2 \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Vektorer kan representeres geometrisk:

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$



3) Transponering:

$$A \rightsquigarrow A^T = A^t = A'$$

$(m \times n)$ $\qquad$ $(n \times m)$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2×3 $\qquad$ 3×2

Generelt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En kvadratisk matrise A er symmetrisk hvis $A^T = A$.

$$A^T = A \iff a_{ij} = a_{ji} \text{ for alle } i, j.$$

Ex:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ er symmetrisk $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ er ikke symmetrisk $\qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Spesielle matriser:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nullmatrise} \quad (O_{2\times 2})$$

$$-A = (-1)\cdot A$$

Regneregler:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
$$r\cdot(A+B) = r\cdot A + r\cdot B$$

(A, B, C matriser, r et tall)

$\vdots$

$$(A^T)^T = A$$
$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$
$$(rA)^T = r\cdot A^T$$

La $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n\}$ være m-vektorer.
En lineær-kombinasjon av disse vektorene er et uttrykk på formen

$$c_1\cdot\underline{v}_1 + c_2\cdot\underline{v}_2 + \ldots + c_n\cdot\underline{v}_n$$

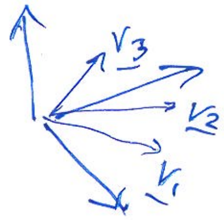
der $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er tall (skalarer).

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$2\underline{v}_1 - 1\cdot\underline{v}_2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

Eks: Er $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ en lineærkombinasjon

av $\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$?



Løsning:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_2 + c_3 &= 2 \\ c_1 + c_3 &= 3 \end{aligned}}$$

lin. system

Ja, lin. komb. ← $\underline{c_1 = -1}$ $\quad \underline{c_2 = -2}$ $\quad \underline{c_3 = 4}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -1 \cdot \underline{v}_1 + (-2) \cdot \underline{v}_2 + 4 \cdot \underline{v}_3$$

Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Merk: $\underline{w}$ er en lineær komb. av $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{w} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n$$

$$\Updownarrow$$

lineært system med utvidet koeff. matrise $\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n & \underline{w} \end{array}\right)$

Konklusjon:

Enhver vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ er en lineær komb av $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$

fordi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right)$$

én løsning.

Vektorene $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n}\}$ er lineært uavhengige

hvis ingen av vektorene er en lineær kombinasjon av de andre.

Eks: $n=3$ $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, v_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v_1} = a\underline{v_2} + b\underline{v_3} \\ \underline{v_2} = a\underline{v_1} + b\underline{v_3} \\ \underline{v_3} = a\underline{v_1} + b\underline{v_2} \end{array}\right\}$$

ikke lineært uavhengige

dvs lineært avhengige

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \underline{v_1} - a\underline{v_2} - b\underline{v_3} = \underline{0} \\ -a\underline{v_1} + \underline{v_2} - b\underline{v_3} = \underline{0} \\ -a\underline{v_1} - b\underline{v_2} + \underline{v_3} = \underline{0} \end{array}\right\} \iff c_1 \cdot \underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + c_3\underline{v_3} = \underline{0}$$

har en ikke-triviell løsning.

Metode for å undersøke lineær avhengighet mellom $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$.

Se på likningen $c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$\Updownarrow$

Lineært system med utvidet koeff.matr.
$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n & \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix} \end{array}\right)$$

én løsning: $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ (triviell løsn.)

Da er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ lineært **uavhengige**

uendelig mange løsninger: (minst én fri variabel)

(mange) ikke-trivielle løsninger

Da er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ lineært **avhengige**

Eks I: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ingen frie variable
dvs. kun triviell løsn.

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ er **lineært uavhengige**

Eks 2: $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En fri variabel $\Rightarrow$ ikke-trivielle løsninger

$\Rightarrow \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, v_3\}$ er lineært avhengige.

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \quad &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= -2c_2 = -2c_3 \\ c_2 &= c_3 \\ c_3 &= \text{fri} \end{aligned}$$

$$(c_1, c_2, c_3) = \underline{\underline{(-2c_3, c_3, c_3)}} \qquad c_3 \text{ fri}$$

$c_3 = 1$: $\quad c_1 = -2, \; c_2 = 1, \; c_3 = 1$

$$-2 \cdot \underline{v_1} + 1 \cdot \underline{v_2} + 1 \cdot \underline{v_3} = \underline{0}$$

$$\underline{v_2} = 2\underline{v_1} - \underline{v_3}$$