FORELESNING 14

ELE 3719

MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

FEB 28 2013

BI

PLAN:

Lærebok [MKF] 1.6–1.10

① Matriseregning. Determinanter og inverse matriser

② Egenverdier og egenvektorer ← Neste gang.

---

① Matriseregning (fortsatt)

i) Matrisemultiplikasjon: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} \rightsquigarrow \underset{m\times p}{A\cdot B}$

Eks: $\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 7 & 10 \\ -1 & 21 & 24 \end{pmatrix}}$

$1\cdot 1 + 2\cdot(-1)$

	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 10 \\ -1 & 21 & 24 \end{pmatrix}$

$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$ er ikke definert

Merk: 1) Operasjonen er ikke symmetrisk

$A\cdot B \neq B\cdot A$

2) Lineært likningssystem

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Matriseform $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$

Potenser av matriser:

$A \longrightarrow$ $A^2 = A \cdot A$

$n \times n$ (kvadratisk)

$A^3 = A \cdot A \cdot A$

$\vdots$

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ faktorer}}$

Vi setter $A^1 = A$

$A^0 = I_n$ (identitets-matrisen)

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Regneregler:

Se [MKF].

Viktig: 1) $AB \neq BA$

2) $(AB)^T = B^T A^T$

ii) Determinanter og inverse matriser

BI

Defn: $\underset{n\times n}{A} \rightsquigarrow \det(A) = |A|$ (et tall)

$\rightsquigarrow$ Hvis det finnes en matrise B slik at

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

så kalles B den inverse til A. I så fall er B entydig, $B = A^{-1}$.

Merk: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ identitetsmatrisen

$n \times n$ - matrise

Egenskap: $\begin{cases} A \cdot I = A \\ I \cdot A = A \end{cases}$ for alle matriser A

Hvordan regne ut $|A|$, A^{-1}:

Tilfellet $n=2$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$A^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, & |A| \neq 0 \\ \text{ikke definert}, & |A| = 0 \end{cases}$$

Tilfellet $n > 2$:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

(kofaktorutvikling langs 1. rad)

Kofakter: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Fortegn: $\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix}$

Minor: Determinanten til matrisen vi får ved å stryke rad i og kolonne j fra A.

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$

$$= 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cdot 9 - 3 \cdot 4) - (1 \cdot 9 - 1 \cdot 4) + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & \sqrt{13} \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot * + \ldots$$

$$= 1 \cdot \left((-1) \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{13} \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = 1 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 2 - 0)$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{-6}}$$

Merk:

hva som helst

$$\begin{vmatrix} a_{11} & - & - & - & - \\ 0 & a_{22} & - & - & - \\ 0 & 0 & a_{33} & - & - \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

null

<u>øvre triangulær</u>

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$$

-1, -1, -2

$$|A| = |T| = \underline{\underline{2}} \qquad |T| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$$

Merk: Når vi gjør en elementær radoperasjon, vil determinanten endre seg på følgende måte:

i) Bytte om to rader $A \longrightarrow B$	$\lvert B \rvert = -\lvert A \rvert$
ii) Mult. en rad med $c \neq 0$ $A \longrightarrow B$	$\lvert B \rvert = c \cdot \lvert A \rvert$
iii) Legge til $c \cdot \text{Rad}(i)$ i $\text{Rad}(j)$ $A \longrightarrow B$	$\lvert B \rvert = \lvert A \rvert$

Regneregler:

i) $\lvert AB \rvert = \lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert$

ii) $\lvert A^T \rvert = \lvert A \rvert$

iii) $\lvert rA \rvert = r^n \cdot \lvert A \rvert$ hvis A er $n \times n$-matrise

Merk:

Kofaktorutviklingen til A langs en vilkårlig rad eller kolonne gir $\det(A)$.

Inverse matriser: Tilfelle $n > 2$

Merk: A har en invers matrise $\iff |A| \neq 0$

Hvordan regne ut A^{-1} hvis $|A| \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Regneregler:

i) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad [(AB)^T = B^T \cdot A^T]$

ii) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Eks: Lineære likningssystemer $(n \times n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff$$

Matriseform:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Hvis $|A| \neq 0$: A^{-1} finnes

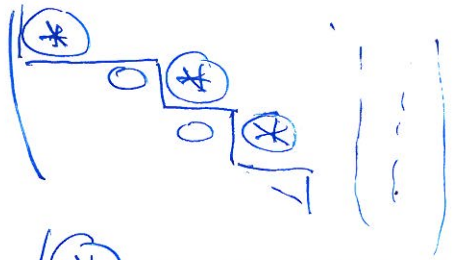
$$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$
$$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$
$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \quad \text{én løsning.}$$

For et $n \times n$ lineært likningssystem: $A\underline{x} = \underline{b}$

$|A| \neq 0$: Én løsning $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$|A| = 0$: Ingen løsning eller uendelig mange løsninger

Trappeform:



uend. mange løsn.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

ingen løsn.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 13 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} \implies \text{én løsning}$$

$$= 1 \cdot (8 - 6) = \underline{2} \neq 0$$

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} +6 & -5 & 1 \\ -6 & +8 & -2 \\ +2 & -3 & +1 \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$