FORELESNING 15

ELE 3719

BI

Eivind Eriksen — MAR 05 2013 — MATEMATIKK

PLAN:

1. Homogene likningssystemer og determinanter
2. Egenverdier og egenvektorer
3. Kvadratiske former.

Lærebok

[HKF] 1.9–1.10, 2.1

---

1. **Repetisjon:**

Lineært likningssystem $A\underline{x} = \underline{b}$
(kvadratisk: $n \times n$)

$|A| \neq 0$: Én løsn. $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$
$|A| = 0$: Ingen løsn. eller uendelig mange løsn.

Merk: Homogent tilfelle: $A\underline{x} = \underline{0}$

$|A| \neq 0$: Én løsn. $\underline{x} = A^{-1}\cdot\underline{0} = \underline{0}$ (triviell løsn)
$|A| = 0$: Uend. mange løsn. (ikke-trivielle løsn.)
(antall frihetsgrader: $n - \text{rk} A$)

Eks: Er $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix}$ lineært uavh?

$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3 v_3 = \underline{0}$ → Kun triviell løsn $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ } lin. uavh.

→ Ikke trivielle løsn } lin. avh.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & -1 & -1\\3 & 2 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\2 & -1 & -1\\3 & 2 & 7\end{vmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{\neq 0} \text{lin. uavh.} \\ \xrightarrow{=0} \text{lin. avh} \end{cases}$$

$-1\cdot 7 - 2\cdot(-1)$
$\|$
$= 1\cdot(-5)$
$-1\cdot(17)$
$+2\cdot(7)$
$= -8 \neq 0$

② Egenverdier og egenvektorer

La A være en $n \times n$-matrise. Vi ser på likningen

$$\boxed{A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}}$$

der λ er et tall og $\underline{x}$ er en n-vektor. Vi sier at λ er en egenverdi og $\underline{x}$ er en egenvektor hvis λ og $\underline{x}$ er løsning av likningen med $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$A \cdot \underline{x} = \lambda I \underline{x}$$

$$A\underline{x} - \lambda I \underline{x} = \underline{0}$$

$$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$$

λ egenverdi

$\Updownarrow$

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ har ikke-trivielle løsn. $\underline{x}$

$\Updownarrow$

$|A - \lambda I| = 0$
Karakteristisk likning.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x + 2y = \lambda \cdot x$$
$$2x + y = \lambda \cdot y$$

$$x + 2y - \lambda x = 0$$
$$2x + y - \lambda y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} (1-\lambda)x + 2 \cdot y &= 0 \\ 2x + (1-\lambda) \cdot y &= 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 2^2 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \underline{\lambda = -1}, \ \underline{\lambda = 3}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Egenverdier: $\lambda_1 = \underline{-1}$, $\lambda_2 = \underline{3}$

$\left(\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{kar. likn.} \right)$

$\underline{\lambda_1 = -1:}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-1

$2x + 2y = 0$

$\cancel{2x + 2y = 0}$

$\boxed{\begin{matrix} x = -y \\ y = \text{fri} \end{matrix}}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trappeform

Egenvektorer for $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\underline{\lambda = 3:}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2x + 2y = 0$

$\cancel{2x - 2y = 0}$

$x = y$

y fri

Egenvektorer for $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Metode for å finne egenverdier og egenvektorer

A $n \times n$-matrise

i) <u>Egenverdier</u>: Skriv opp karakteristisk likning

$$\boxed{|A - \lambda I| = 0}$$

Løsningene er egenverdiene.

ii) <u>Egenvektorer</u>: For hver egenverdi λ funnet ovenfor, se på likningssystemet

$$\boxed{(A - \lambda I) \cdot \underline{x} = \underline{0}}$$

Løsn. for $\underline{x}$ er egenvektorene.

<u>Merk</u>: Minst én fri variabel.

<u>Eks</u>:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$ad - \lambda d - a\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{= \, tr\,A}\lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{= \, det(A)} = 0$$

Karakteristisk likning for $n=2$:

$$\boxed{\lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A) = 0}$$

$tr(A)$ = <u>sporet</u> til A (trace)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightsquigarrow tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\underline{\lambda_1 = 1}, \ \underline{\lambda_2 = 1}$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 0\cdot\lambda + 1 = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda^2 = -1$ ingen løsn.

ingen egenverdier

Generelt:

i) Hvis A er en $n\times n$-matrise, så blir den kar. likn. til A en n'te grads likning

$$\boxed{(-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot tr(A) \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \det(A) = 0}$$

ii) Hvis A er symmetrisk så har A n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ (noen av disse kan være like).

I så fall har vi:

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n &= tr(A) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n &= \det(A) \end{aligned}}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$+(-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 5\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = -3 \text{ eller } \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2}$$

$$\underline{\lambda_1 = -3}, \ \underline{\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}}, \ \underline{\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}}$$

(3) Kvadratiske former

En funksjon $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\underline{x})$ i n variable er en kvadratisk form hvis den kan skrives som

$$f(\underline{x}) = c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{13} x_1 x_3 + \ldots$$
$$\ldots + c_{nn} \cdot x_n^2$$

der c_{ij} er tall.

Vi kan skrive kvadratiske former vha matriser.

Eks: $f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 3y^2$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 2$
$a_{12} + a_{21} = 5$
$a_{22} = 3$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y & a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}x + a_{21}y)x + (a_{12}x + a_{22}y) \cdot y$$

$$= a_{11}x^2 + a_{21}xy + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$= a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2$$

$$f(x,y) = \underline{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

Enhver kvadratisk form i n variable $(x_1, \ldots, x_n)$ kan skrives som

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

der A er en symmetrisk $n \times n$-matrise (entydig), $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Oppgaveark 6

6b)

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lineært uavh.?

Ser direkte at
$\underline{a}_2 = -5\underline{a}_1$
$\Rightarrow$ lineært avh.

$$c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 = \underline{0}$$

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 - 5c_2 = 0$
$\cancel{c_1 - 5c_2 = 0}$
$\cancel{-c_1 + 5c_2 = 0}$

$c_1 = 5c_2$
$c_2 = \text{fri}$

$\underline{c_2 = 1, \ c_1 = 5}$ ikke-triviell løsn.

$\Leftarrow$

$\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ lineært avh.

$$5\underline{a}_1 + 1 \cdot \underline{a}_2 = 0$$

$$\underline{a}_2 = -5\underline{a}_1$$