FORELESNING 16

ELE 3719

BI

EIVIND ERIKSEN

MAR 07 2013

MATEMATIKK

PLAN:

① Klassifikasjon av kvadratiske former

② Optimering og andregradsfunksjoner

Lærebok:

[MKF] 2.2–2.3

---

① Kvadratiske former

Repetisjon: En kvadratisk form er en funksjon $f(x_1, \ldots, x_n)$ som kan skrives $f(x_1,\ldots,x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \ldots + c_{nn}x_n^2$ (alle ledd har grad 2).

f kvadratisk form $\longrightarrow$ $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ for en entydig symmetrisk matrise A $(n \times n)$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A kalles den symmetriske matrisen til den kvadratiske formen

Eks: $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

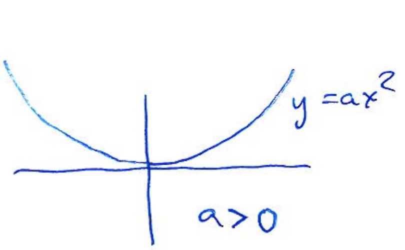
Klassifikasjon av kvadratiske former.

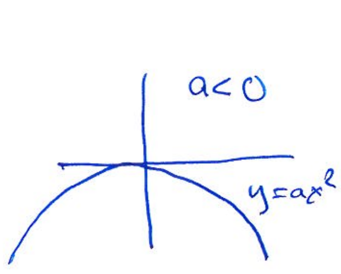
Eks:

$n=1$

$Q(x) = ax^2$

$A = (a)$





$Q(x_1, \ldots, x_n)$ kvadratisk form med symmetrisk matrise A.

Defn.

1) Q (også A) kalles positiv semidefinitt hvis
$Q(\underline{x}) = Q(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ for alle $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

2) Q (også A) kalles negativ semidefinit hvis
$Q(\underline{x}) \leq 0$ for alle $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

3) Q (også A) kalles indefinit ellers (dvs at $Q(\underline{x})$ tar både positive og negative verdier)

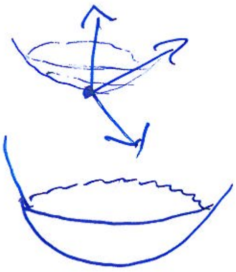
Merk:

* $Q(\underline{0}) = 0$

Q kalles positiv definit hvis $Q(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$

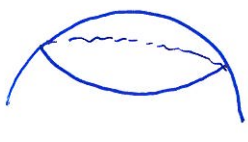
— " — negativ definit " $Q(\underline{x}) < 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$

* Graf:



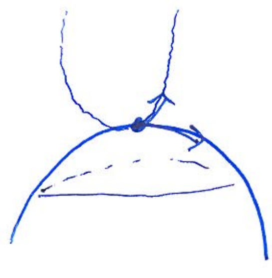
positiv (semi)definit

min



negativ (semi) definit

max



indefinit

sadel

Eks: Ingen kryssledd

$$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$ (a,b,c er tall)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

positiv semidefinitt: $Q(\underline{x}) \geq 0 \iff a,b,c \geq 0$

positiv definit: $Q(\underline{x}) > 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0} \iff a,b,c > 0$

negativ semidefinit: $Q(\underline{x}) \leq 0 \iff a,b,c \leq 0$

negativ definit: $Q(\underline{x}) < 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0} \iff a,b,c < 0$

indefinit: a,b,c inneholder både positive og negative tall

Eks: $Q(\underline{x}) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ ← pos. defn.
min i $(0,0,0)$

$Q(\underline{x}) = 2x^2 - 3y^2 + 4z^2$ ← indefinit
$Q(1,0,0) = 2 > 0$
$Q(0,1,0) = -3 < 0$
Sadel i $(0,0,0)$

$Q(\underline{x}) = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$

Merk: Når Q ikke har kryssledd (A diagonal)
Så er a,b,c (diagonalen i A) akkurat egenverdiene til A.

Resultat:

$Q(x_1, \ldots, x_n)$ kvadratisk form med symmetrisk matrise A

La $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ være egenverdiene til A. Da har vi:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$	$\Leftrightarrow$	pos. semidefinit
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq 0$	$\Leftrightarrow$	neg. semidefinit
ellers (dvs både positive og negative egenverdier)	$\Leftrightarrow$	indefinit
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$	$\Leftrightarrow$	pos. defn.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$	$\Leftrightarrow$	neg. defn.

Eks: $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Egenverdier for A: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

$\underline{\lambda = 2}$ eller $\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\underline{\lambda = 0}, \underline{\lambda = 2}$

Q er positiv semidefinit men ikke pos. defn.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = u_1^2 + 0u_2^2 + 2u_3^2 = u_1^2 + 2u_3^2$$

Variabelskifte:
$$u_1 = x_1 + x_2 \qquad x_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}$$
$$u_2 = x_1 - x_2 \qquad x_2 = \frac{u_1 - u_2}{2}$$
$$u_3 = x_3 \qquad x_3 = u_3$$

Bevis for resultat: Grov skisse

Enhver kvadratisk form kan skrives om til $\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2$ ved å gjøre et "lurt" variabel bytte.

② Derivasjon av andregradsfunksjoner

BI

$$Q(x_1 \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

$$= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

kvadratisk form

$$f(x_1 \dots, x_n) = \underbrace{a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2}$$
$$+ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$
$$+ c$$

annengradsfunksjon

$$= \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + c, \quad B = (b_1\ b_2 \dots b_n)$$

Eks: $f(x,y) = \underbrace{2x^2 + 3xy - y^2}_{\text{grad } 2} + \underbrace{4x - y}_{\text{grad } 1} + \underbrace{7}_{\text{grad } 0}$

$$= \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + c$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = (4\ \ -1), \quad c = 7$$

Derivasjon:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$$

Resultat:

i) $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ kvadr. form:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A \cdot \underline{x}}$$

ii) $f(\underline{x}) = B\underline{x}$ lineær form:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = B^T}$$

Eks: $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2 + 4x - y + 7$

$$= \underline{x}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underline{x} + \underbrace{(4 \;\; -1)}_{B} \cdot \underline{x} + \underbrace{7}_{C}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A \cdot \underline{x} + B^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 3y + 4 \\ 3x - 2y - 1 \end{pmatrix}$$

Stasjonære punkter:

$$f = \underline{x}^T A \underline{x} + B \underline{x} + C \implies \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A \underline{x} + B^T$$

Stasjonære pkt:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A \underline{x} + B^T = \underline{0}$$

$$2A \cdot \underline{x} = -B^T$$

$$A \cdot \underline{x} = -\frac{1}{2} B^T$$

TO muligheter: i) $|A| \neq 0$: $\underline{x} = A^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} B^T\right) = -\frac{1}{2} A^{-1} \cdot B^T$

et stasjonært punkt

ii) $|A| = 0$: ingen løsninger (stasjonære pkt) eller uendelig mange

Eks: $f(x,y,z) = 2xy - z^2 = \underline{x}^T A \underline{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenverdier: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(\lambda^2-1) = 0$

$\lambda = -1, \quad \lambda = \pm 1$

$\Rightarrow$ A indefinit

Stasjonære pkt: $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eneste stasj. pkt = sadelpkt.

Appendiks: Ortogonal diagonalisering og klassifikasjon av kvadratiske former.

BI

$Q(\underline{x}) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \underline{x}^T A \underline{x}$ med symmetrisk matrise $\underset{(n \times n)}{A}$

Kvadratisk form

i) Vi har n egenverdier for A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, og vi kan alltid finne n lineært uavhengige egenvektorer $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}$ slik at $A\underline{v_i} = \lambda_i \cdot \underline{v_i}$.

La

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P = \left(\underline{v_1} \,\middle|\, \underline{v_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v_n} \right)$$

Da vil

$$A \cdot P = A \cdot \left(\underline{v_1} \,\middle|\, \underline{v_2} \,\middle|\, \cdots \right) = \left(A\underline{v_1} \,\middle|\, A\underline{v_2} \,\middle|\, \cdots \right) = \left(\lambda_1 \underline{v_1} \,\middle|\, \lambda_2 \underline{v_2} \,\middle|\, \cdots \right)$$

$$= \left(\underline{v_1} \,\middle|\, \underline{v_2} \,\middle|\, \cdots \right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} = PD$$

Dvs: $\boxed{AP = PD}$. Dessuten er $|P| \neq 0$ siden $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}\}$ er lineært uavhengige, så $AP = PD \Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PD = D$

Dvs $\boxed{P^{-1}AP = D}$.

ii) Når $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ er to n-vektorer, definerer vi <u>indreprodukt</u> eller <u>prikkprodukt</u> som

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Vi sier at en mengde $\{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \ldots, \underline{u_n}\}$ av vektorer er <u>ortonormal</u>

dersom $\begin{cases} \underline{u_i} \cdot \underline{u_i} = 1 & \text{for } i = 1, 2, \ldots, n \\ \underline{u_i} \cdot \underline{u_j} = 0 & \text{for } i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$

Dersom dette er tilfellet, så har vi at matrisen $U = \left(\underline{u_1} \,\middle|\, \underline{u_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{u_n} \right)$ oppfyller

$$U^T \cdot U = \begin{pmatrix} \underline{u_1} \\ \hline \underline{u_2} \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(\underline{u_1} \,\middle|\, \underline{u_2} \,\middle|\, \cdots \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \end{pmatrix} = I$$

Dette betyr at $\boxed{U^{-1} = U^T}$.

iii) Hvis egenvektorene i i) er en ortonormal mengde, så kan vi skrive

$$\boxed{P^{-1} = P^T} \quad \Rightarrow \quad P^T A P = D \quad \text{eller} \quad A = PDP^T$$

Dermed får vi:

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}^T PDP^T \underline{x} = (P^T \underline{x})^T \cdot D \cdot (P^T \underline{x})$$

Med variabelbyttet $\boxed{\underline{y} = P^T \underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} = P \cdot \underline{y}}$ har vi derfor

$$Q(\underline{x}) = (P^T \underline{x})^T D (P^T \underline{x}) = \underline{y}^T D \cdot \underline{y} = \underline{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$$

iv) Egenvektorene i i) kan alltid velges slik at de danner en ortonormal mengde når $\underline{A \text{ er symmetrisk}}$.

Eks: $Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Var-skifte:
$$\underline{y} = P^T \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

dvs $y_1 = x_3$, $y_2 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$

Kvadr. form:
$$Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$$
$$= \lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + \lambda_3 \cdot y_3^2$$
$$= \underline{-y_1^2 + 2y_3^2}$$

Egenverdier:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

$\underline{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2}$

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \rightarrow \underline{x} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sjekk $\underline{v_1} \cdot \underline{v_1} = 1$. ok

$\underline{\lambda = 0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \rightarrow \underline{x} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sjekk $\underline{v_2} \cdot \underline{v_1} = 0$. ok
Sjekk $\underline{v_2} \cdot \underline{v_2} = 1$. ok
med koeff $1/\sqrt{2}$

$\underline{\lambda = 2}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \rightarrow \underline{x} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sjekk $\underline{v_1} \cdot \underline{v_3} = 0$. ok
$\underline{v_2} \cdot \underline{v_3} = 0$ ok
$\underline{v_3} \cdot \underline{v_3} = 1$. ok