FORELESNING 19

ELE 3719

BI

EIVIND ERIKSEN APR 02 2013 MATEMATIKK

PLAN:

1. Separable diff. likninger
2. Lineære diff. likninger (av første orden)

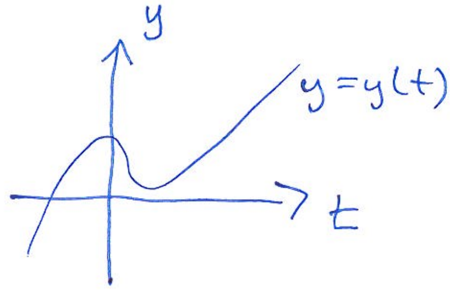
Pensum:

[Diff] 1-3

Første ordens diff. likninger er likninger som inneholder

$$\boxed{y', \ y, \ t}$$

men ikke y'', y''' etc.



Eks: $y' = \frac{t}{y}$

1. Separable

En diff. likning er separabel dersom den kan skrives på formen

$$\boxed{y' = f(y) \cdot g(t)}$$

$y' = y + t$

ikke separabel

Eks: $y' = \frac{t}{y} = \frac{1}{y} \cdot t$

separabel

$y' = t^2 y + y$
$= y \cdot (t^2 + 1)$

separabel

$y' = 2 - y$
$= (2 - y) \cdot 1$

separabel

Løsningsmetode for separable diff. likninger

$$y' = f(y) \cdot g(t) \qquad | : f(y)$$

$$\frac{1}{f(y)} \cdot y' = g(t)$$

$$\frac{1}{f(y)} \cdot \frac{dy}{dt} = g(t) \Rightarrow \frac{1}{f(y)}\, dy = g(t)\, dt$$

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int g(t)\, dt$$

A+A

$$\frac{1}{f(y)}\, y' = g(t)$$

$$\int \frac{1}{f(y)} \underbrace{y'\, dt}_{dy} = \int g(t)\, dt \Rightarrow \int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int g(t)\, dt$$

A+B

Eks: $y' = \frac{t}{y} = \frac{1}{y} \cdot t$ separabel $\quad | \cdot y$

$$y \cdot y' = t \qquad \int y \underbrace{y'\, dt}_{dy} = \int t\, dt$$

$$\boxed{\int y\, dy = \int t\, dt}$$

$$C = C_2 - C_1$$

$$\frac{1}{2} y^2 + C_1 = \frac{1}{2} t^2 + C_2$$

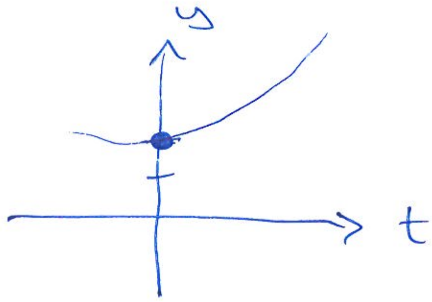
$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} t^2 + C_2 - C_1 = \frac{1}{2} t^2 + C$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} t^2 + C \quad \text{(implisitt løsning)}$$

$$y^2 = t^2 + 2C \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\sqrt{t^2 + 2C}}}$$

$y' = \frac{t}{y}$, $y(0) = 2$

$t=0,\ y=2$



$\Downarrow$

$y = \pm\sqrt{t^2+2C}$

$y(0)=2$: $t=0$, $y=2$

$2 = +\sqrt{0^2+2C}$

$2^2 = 2C \Rightarrow C=2$

$\Downarrow$

$$y = \sqrt{t^2+4}$$

Eks: $y' = 2-y = (2-y)\cdot 1$

$\frac{1}{2-y}\cdot y' = 1$

$\int \frac{1}{2-y}\,dy = \int 1\,dt$

$-\ln|2-y| = t + C$

$\ln|2-y| = -t-C$

$|2-y| = e^{-t-C}$

$2-y = \pm e^{-t}e^{-C}$

$y = 2-(\pm e^{-t}e^{-C})$

$$y = 2 - K\cdot e^{-t}$$

$K = \pm e^{-C}$

② Lineære diff. likninger av første orden

En lineær diff.-likning av første orden kan skrives

$$\boxed{y' + a(t)\cdot y = b(t)} \iff y' = b(t) - a(t)\cdot y$$

der $a(t)$, $b(t)$ er funksjoner i t.

Noen navn:

Homogen hvis $b(t) = 0$
Inhomogen " $b(t) \neq 0$

Konstante koeffisienter hvis $a(t) = a$ er en konstant.

Eks:

$y' = y + t$	$y' = y^2 + t$	$y' = yt + t$
lineær, konst. koeff. inhomogen	ikke lineær. ikke sep.	lineær, sep. $y' - ty = t$, $y' = (y+1)t$
$y' - y = t$		(inhomogen, ikke konstante koeff.)
$a(t) = -1$, $b(t) = t$		

Løsningsmetoder for lineære diff. likn (av første orden)

A) Integrerende faktor (for alle)

B) Karakteristisk likning (for konstante koeff.)

Metode A: Integrerende faktor

Eks: $y' = y + t$ (lineær)

$y' - y = t$ ← std. form $\boxed{a(t) = -1 \quad b(t) = t}$

$(y' - y)\cdot u = t\cdot u$

$u = u(t)$: integrerende faktor

$y'\cdot u - y\cdot u = y'\cdot u + y\cdot u'$

$y'\cdot u - y\cdot u = (y\cdot u)'$

Må ha:

$-y\cdot u = y\cdot u'$

$\Updownarrow$

$-u = u'$

$u = e^{-t}$

$(y\cdot u)' = tu$

$y\cdot u = \int t\cdot u\, dt$

$y = \frac{1}{u}\int t\cdot u\, dt$

$y = e^{t}\int te^{-t}dt$

$$\int \underbrace{te^{-t}}_{u\cdot v'}dt = \underbrace{t\cdot(-e^{-t})}_{uv} - \int \underbrace{1\cdot(-e^{-t})}_{u'v}dt$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} + C$$

$y = e^{t}\cdot\left(-te^{-t} - e^{-t} + C\right)$

$= \underline{\underline{-t - 1 + Ce^{t}}}$

Generelt: Integrerende faktor

$$y' + a(t)y = b(t) \quad | \cdot u$$

$$y' \cdot u + a(t) y \cdot u = b(t) \cdot u$$

$$(y \cdot u)' = b(t) \cdot u$$

$$y \cdot u = \cancel{\int b(t) u \, dt}$$

$$\int b(t) \cdot u \, dt$$

u: integrerende fakter

$$VS = (y \cdot u)' = y'u + y \cdot u'$$

$$\Updownarrow$$

$$u' = a(t) \cdot u$$

$$\boxed{u = e^{\int a(t)dt}}$$

formel for intgrerende faktor

$$y = \frac{1}{u} \int b(t)\, u \, dt$$

$$\boxed{y = e^{-\int a(t)dt} \cdot \int b(t) e^{\int a(t)\,dt} dt}$$

Eks. $\underset{a(t)}{y' + 2t \cdot y} = \underset{b(t)}{t}$

Integrerende faktor:

$$u = e^{\int a(t)dt}$$

$$= e^{\int 2t\,dt}$$

$$\boxed{u = e^{t^2}}$$

$$(y \cdot e^{t^2})' = te^{t^2}$$

$$y \cdot e^{t^2} = \int te^{t^2} dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= t^2 \\ dv &= 2t \cdot dt \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{2} e^{v} dv$$

$$ye^{t^2} = \frac{1}{2} e^{v} + C = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}}}$$

Metode B: Konstante koeff.

$$y' + ay = b(t) \quad \begin{cases} b(t) = 0 & : \text{homogen} \\ b(t) \neq 0 & : \text{inhomogen} \end{cases}$$

i) Homogent tilfelle:

$y' + ay = 0$

Løsn: $y = C \cdot e^{-at}$

Karakteristisk likning:

$r + a = 0$

$\underline{r = -a}$ $\Rightarrow$ Løsn:

$\underline{y = C \cdot e^{-at}}$

Bevis: Anta at $y = e^{rt}$, og setter inn i likningen:

$e^{rt} \cdot r + a \cdot e^{rt} = 0$

$e^{rt}(r + a) = 0$

$r + a = 0 \Rightarrow r = -a$

Dermed er $y = e^{-at}$ en løsn.

Eks:

$y' - y = 0$

Kar. likn.:

$r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

Løsn. av diff. likn.:

$\underline{y = C \cdot e^{t}}$

Konklusjon: $y' + ay = 0$ (homogen, konstante koeff) har generell løsning

$$\boxed{y = Ce^{-at}}$$

ii) Inhomogent tilfelle: Neste gang