FORELESNING 2

ELE 3719 BI

Eivind Eriksen

JAN 10 2013

MATEMATIKK

PLAN:

1. Repetisjon: Sannsynlighetsmål
2. Uavhengighet og betinget sannsynlighet [R] 1.4–1.6

1 Repetisjon: Sannsynlighetsmål

Gitt et stokastisk forsøk med utfallsrom S. Et sannsynlighetsmål er en tilordning

$$E \rightsquigarrow p(E)$$

hendelse (delmengde av S) — (et tall)

Slik at

i) $0 \le p(E) \le 1$ for enhver hendelse E

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + \ldots$

for alle parvis disjunkte hendelser $E_1, E_2, \ldots$

(dvs $E_i \cap E_j = \emptyset$ for alle i, j)

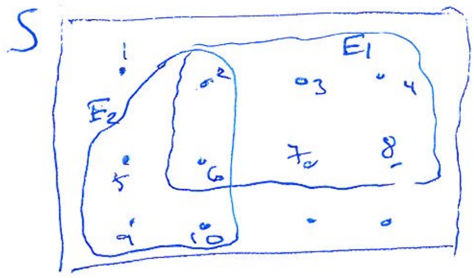
Viktige konsekvenser:

a) $p(E^c) = 1 - p(E)$

b) Hvis $E = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ så er $p(E) = p(s_1) + p(s_2) + \ldots + p(s_r)$

c) $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

Bevis for c):



$$p(E_1) = p(s_2) + p(s_3) + p(s_4) + p(s_6) + p(s_7) + p(s_8)$$

$$p(E_2) = p(s_2) + p(s_5) + p(s_6) + p(s_9) + p(s_{10})$$

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

Merk: I [Ross] skrives $E_1 \cap E_2$ som $E_1 E_2$

② Uavhengighet og betinget sannsynlighet

$p(E_1 \cap E_2) = ?$

Defn: To hendelser E_1 og E_2 er uavhengige huis $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$.

Eks: Vi kaster en terning to ganger

E_1 = Vi får seks på første kast $\qquad p(E_1) = 1/6$

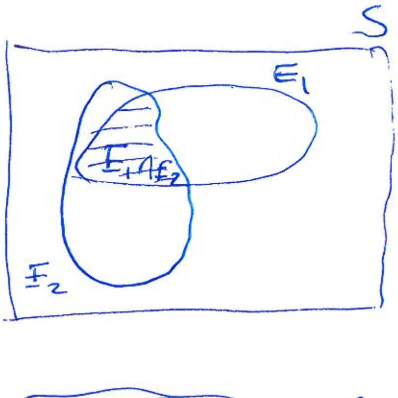
E_2 = Vi får seks på andre kast $\qquad p(E_2) = 1/6$

$E_1 \cap E_2$ = Vi får seks på begge kast $\qquad p(E_1 \cap E_2) = 1/36$

Altså: $\underset{\frac{1}{6}}{p(E_1)} \cdot \underset{\frac{1}{6}}{p(E_2)} = \underset{\frac{1}{36}}{p(E_1 \cap E_2)}$

Dvs: E_1 og E_2 er uavhengige

Eks:

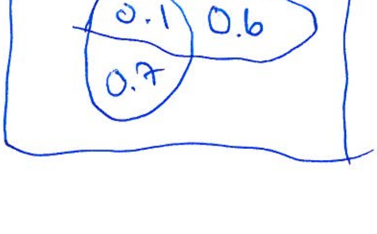


Huis $p(E_1) = 0.7$

$p(E_2) = 0.8$

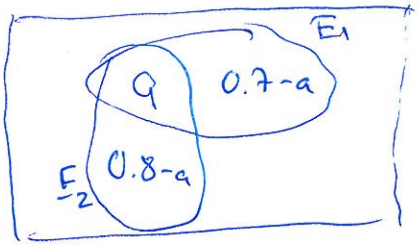
hva er mulige sannsynligheter for $p(E_1 \cap E_2)$?

0.1 ?



Ikke mulig!

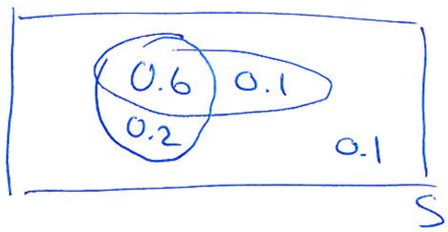
$p(E_1 \cap E_2) = a$:



$$p(E_1 \cup E_2) = a + 0.7 - a + 0.8 - a$$
$$= 1.5 - a \leq 1$$
$$1.5 - 1 \leq a$$
$$a \geq 0.5$$

Konklusjon: $0.5 \leq p(E_1 \cap E_2) \leq 0.7$

Eks: $p(E_1) = 0.7$
$p(E_2) = 0.8$
$p(E_1 \cap E_2) = 0.6$

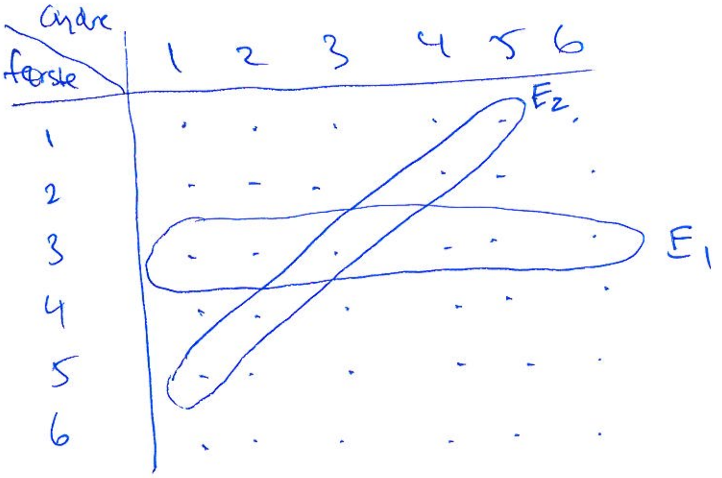


E_1 og E_2 ikke uavhengige

Eks: Vi kaster en terning to ganger

E_1 : vi får 3 på første kast

E_2 : summen av kastene er 6



$$p(E_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$p(E_2) = \frac{5}{36}$$
$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36}$$
$$p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$$

E_1 og E_2 ikke uavhengige

Betinget sannsynlighet

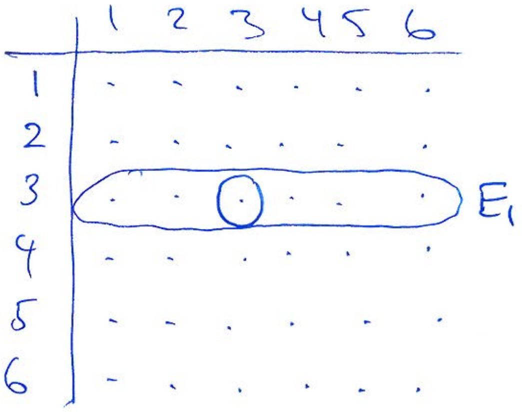
Defn: Gitt to hendelser E og F, med $p(F) \neq 0$.
Vi skriver da

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

og kaller dette sannsynligheten for E gitt F, en betinget sannsynlighet.

Eks: (fortsatt)

E_1: tre på første kast
E_2: sum seks

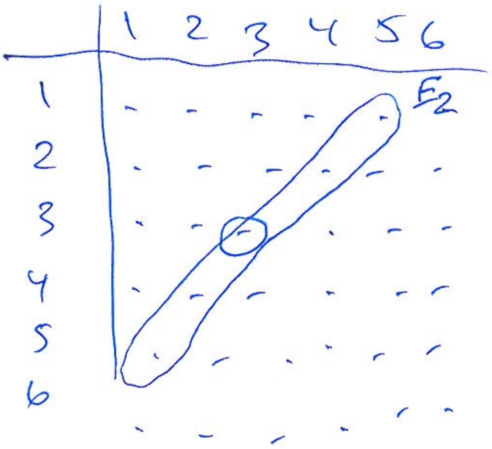


$$p(E_2|E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)}$$

(Sannsynlighet for sum seks gitt at vi fikk tre på første kast) $= \dfrac{1/36}{1/6} = \dfrac{1}{6}$

eller

$$p(E_2|E_1) = \frac{\text{ant. gunstige}}{\text{ant. mulige}} = \frac{1}{6}$$



$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{1/36}{5/36}$$

(Sanns. for tre på første ka. gitt sum er seks) $= 1/5$

eller

$$p(E_1|E_2) = \frac{\text{ant. gunsti.}}{\text{ant. mulige}} = \frac{1}{5}$$

Generelt har vi:

$$p(E|F) \cdot p(F) = p(E \cap F) \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Defn:} \\ p(E|F) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)} \end{array} \right.$$

Vi har også:

$$\boxed{E \text{ og } F \text{ er uavhengige} \Leftrightarrow p(E|F) = p(E)}$$

Bevis:

Anta: $p(E|F) = p(E)$. Da er $p(E) \cdot p(F) = p(E|F) \cdot p(F)$

$= p(E \cap F)$

Altså er E og F uavhengige.

Anta: E og F uavhengige. Da er $p(E) \cdot p(F) = p(E \cap F)$

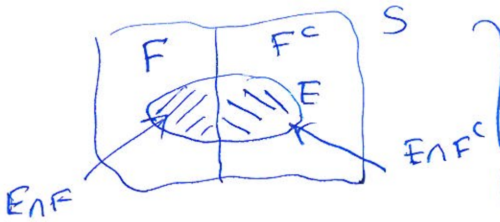
Altså er $p(E) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)} = p(E|F)$.

Bayes' lov:

$$p(F|E) = \frac{p(E|F) \cdot p(F)}{p(E|F) \cdot p(F) + p(E|F^c) \cdot p(F^c)}$$

Bevis:

$$p(F|E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E \cap F)}{p(E)} = \frac{p(E|F) \cdot p(F)}{p(E)}$$



$S = F \cup F^c$

Partisjon: S er disjunkt union.

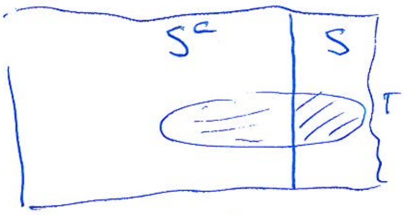
$$p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap F^c)$$
$$= p(E|F) \cdot p(F) + p(E|F^c) \cdot p(F^c)$$

Eks: Vi ser på en diagnostisk test for en bestemt sykdom.

T = testen slår positivt ut

S = personen har sykdommen

S^c = personen har ikke sykdommen



partisjon

$p(S|T) = ?$ ← det vi ønsker å vite

$$\left.\begin{aligned} p(S) &= 0.005 \\ p(S^c) &= 1 - p(S) = 0.995 \\ p(T|S) &= 0.95 \\ p(T|S^c) &= 0.01 \end{aligned}\right\} \text{kjent}$$

$$p(S|T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T|S) \cdot p(S)}{p(T|S) \cdot p(S) + p(T|S^c) \cdot p(S^c)} = \frac{0.95 \cdot 0.005}{---}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} \simeq \underline{\underline{0.32}}$$

Versjon av Bayes' lov med partisjon $S = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_n$ (dvs $F_1, F_2, \ldots, F_n$ parvis disjunkte og $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$) istedet for $S = F \cup F^c$:

$$p(F_i|E) = \frac{p(F_i \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E|F_i) \cdot p(F_i)}{p(E|F_1) \cdot p(F_1) + p(E|F_2) \cdot p(F_2) + \ldots + p(E|F_n) \cdot p(F_n)}$$