Forelesning 21 — ELE 3719

Eivind Eriksen

Apr 09 2013

Matematikk

PLAN:

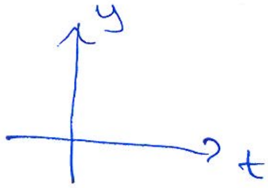
1) Variasjonsregning

Pensum:

[Var]

Oppgaveerk 9

4) a) $ty' + 2y + t = 0 \quad (t \neq 0)$



$$ty' = -2y - t$$

$$y' = \frac{-2y - t}{t} = -\frac{2}{t} \cdot y - 1$$

$$y' + \frac{2}{t} \cdot y = -1 \quad | \cdot t^2$$

$$(y \cdot t^2)' = -t^2$$

$$y \cdot t^2 = \int -t^2 \, dt = -\frac{1}{3}t^3 + C$$

$$y = -\frac{t}{3} + \frac{C}{t^2}$$

Int. faktor:

$$u = e^{\int 2/t \, dt} = e^{2 \ln t} = (e^{\ln t})^2 = t^2$$

---

b) $y' - \frac{1}{4}y = t \quad (t > 0)$

Int. faktor:

$$u = e^{-1/4 t}$$

$$(y \cdot e^{-1/4 t})' = t \cdot e^{-1/4 t}$$

$$y \cdot e^{-1/4 t} = \int \underset{u}{t}\, \underset{v'}{e^{-1/4 t}} \, dt = \underset{u \cdot v}{t \cdot (-4e^{-1/4 t})} + \int \underset{u'v}{1 \cdot 4e^{-1/4 t}} \, dt$$

BI

$$y \cdot e^{-1/4 t} = -4t e^{-1/4 t} - 16 e^{-1/4t} + C$$

$$\underline{\underline{y = -4t - 16 + Ce^{1/4 t}}}$$

$\underline{\underline{\text{Alt:}}}$ $y' - \frac{1}{4}y = t \quad (t>0)$

$$y = y_n + y_p = \underline{Ce^{1/4t} - 4t - 16}$$

y_n: $y' - \frac{1}{4}y = 0$

$r - 1/4 = 0$

$r = 1/4 \quad \Rightarrow \quad y_n = \underline{C \cdot e^{\frac{1}{4}t}}$

y_p: $y' - \frac{1}{4}y = t$ Gjetter: $y = \underline{At + B}$

$y' = A$

$A - \frac{1}{4}(At+B) = t$

$f(t) = t$

$f'(t) = 1$

$(A - \frac{1}{4}B) + (-\frac{1}{4}A)t = t$

$\underset{0}{\shortparallel} \qquad \underset{1}{\shortparallel}$

$B = -16 \qquad A = -4 \qquad \Rightarrow \quad y_p = \underline{-4t - 16}$

c) $y' - \frac{t}{t^2-1} y = t \qquad (t>1)$

$$\left(y \cdot (t^2-1)^{-1/2}\right)' = t \cdot (t^2-1)^{-1/2}$$

$$y \cdot (t^2-1)^{-1/2} = \int t \cdot (t^2-1)^{-1/2} dt$$

$$y \cdot (t^2-1)^{-1/2} = (t^2-1)^{1/2} + C$$

$$y = (t^2-1) + C \cdot (t^2-1)^{1/2}$$

$$= t^2-1 + C \cdot \sqrt{t^2-1}$$

Int. faktor:

$$\int -\frac{t}{t^2-1} dt = -\int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$u = t^2-1$$
$$du = 2t \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|t^2-1|$$

$$\Rightarrow v = e^{-\frac{1}{2}\ln|t^2-1|}$$

$$= |t^2-1|^{-1/2}$$

$$= (t^2-1)^{-1/2}$$

$$\int t \cdot (t^2-1)^{-1/2} dt =$$

$$w = (t^2-1)$$
$$dw = 2t\, dt$$

$$= \int w^{-1/2} \frac{1}{2} dw$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{w^{1/2}}{\cancel{1/2}} + C$$

$$= (t^2-1)^{1/2} + C$$

① Variasjonsregning:

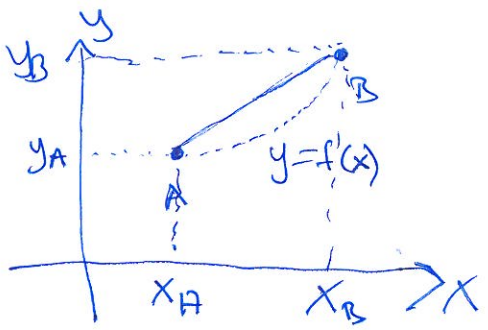
max/min for funksjonaler

Funksjonal:

$J(y)$: $\quad y = y(t) \rightsquigarrow J(y)$

funksjon $\qquad$ tall

Eks:



Ser på funksjoner $y(x)$ definert på $[x_A, x_B]$ slik at $\begin{cases} y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{cases}$

(= kurve fra A til B)

Problem:

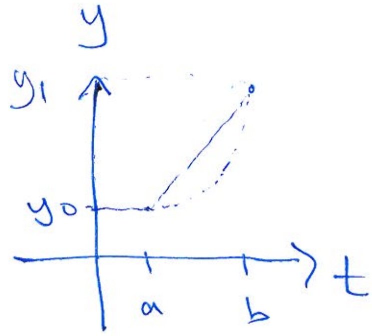
$$\min J(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

(= korteste vei fra A til B)

Vi skal se på følgende typer av funksjonaler:

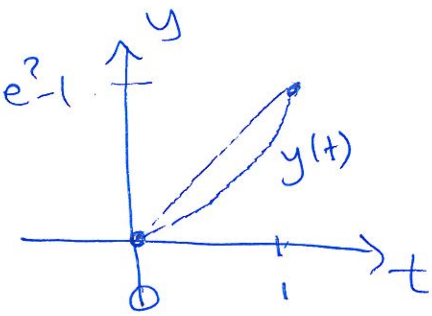
$$\boxed{J(y) = \int_a^b F(t,y,y')\,dt}$$

der y er en funksjon slik at $\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$



$\left.\begin{array}{l} F(t,y,y') \\ a, b, y_0, y_1 \end{array}\right\}$ gitt

Eks: $J(y) = \int_0^1 -y^2 - (y')^2\,dt$ der $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = e^2 - 1 \end{cases}$



Ex: $y(t)$ rett linje

$y = (e^2-1)t$ ← gjennom origo, stigningstall $\frac{e^2-1}{1} = e^2-1$

$$J(y) = \int_0^1 -((e^2-1)t)^2 - (e^2-1)^2\,dt$$

$$= -(e^2-1)^2 \cdot \int_0^1 t^2 + 1\,dt = -(e^2-1)^2 \cdot \left[\tfrac{1}{3}t^3 + t\right]_0^1$$

$$= \underline{-\frac{4}{3}(e^2-1)^2}$$

Variasjonsproblemet på std.-form

$$\max/\min \quad J(y) = \int_a^b F(t, y, y')\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$$

BI

Hovedresultat:

Hvis $y(t)$ er en løsning av variasjonsproblemet, så vil $y(t)$ tilfredstiller Euler-likningen:

$$\boxed{F'_y - \frac{d}{dt}\left(F'_{y'}\right) = 0} \qquad F = F(t, y, \dot{y})$$

Eks: $F = -y^2 - \dot{y}^2$ $\qquad (\dot{y} = y')$

$F'_y = -2y$

$F'_{\dot{y}} = -2\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}(F'_{\dot{y}}) = \frac{d}{dt}(-2\dot{y}) = -2\cdot\ddot{y}$

Euler: $\boxed{-2y + 2\ddot{y} = 0}$

$2y'' - 2y = 0$ $\quad \begin{cases} \text{andreordens lineær diff.likn} \\ \text{homogen, konst. koeff.} \end{cases}$

$2r^2 - 2 = 0$

$r = \pm 1 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t}$

Bestemmer C_1 og C_2:

Euler-likning: $y = C_1 \cdot e^t + C_2 e^{-t}$

Problem: max/min $\int_0^1 -y^2 - \dot{y}^2 \, dt$ når $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = e^2 - 1 \end{cases}$

$y(0)=0$: $\quad 0 = C_1 \cdot e^0 + C_2 e^{-0} = C_1 + C_2$

$\Rightarrow C_2 = -C_1$

$y(1) = e^2 - 1$: $\quad e^2 - 1 = C_1 \cdot e^1 + C_2 \cdot e^{-1} = C_1 \cdot e - C_1 e^{-1}$

$e^2 - 1 = C_1 \cdot (e - e^{-1})$

$C_1 = \frac{e^2 - 1 \cdot e}{e - e^{-1} \cdot e} = \frac{e\cancel{(e^2-1)}}{\cancel{e^2 - 1}} = \underline{e}, \quad \underline{C_2 = -e}$

$y = e \cdot e^t - e e^{-t} = \underline{e^{t+1} - e^{1-t}}$

For å avgjøre om funksjonen $y(t)$ som løser Euler-likningen + initial betingelsene er min/max, ser vi på $F(t, y, y')$:

Hvis F er <u>konveks</u> som en funksjon i $(y, \dot{y})$, så er $\underline{y(t) \text{ min}}$

Hvis F er <u>konkav</u> som en funksjon i $(y, \dot{y})$, så er $\underline{y(t) \text{ max}}$

Konvekse / konkave funksjoner i to variable

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f'_x = 2x \qquad f'_y = 2y$$

$$\boxed{\begin{aligned} f''_{xx} &= 2 \\ f''_{xy} &= 0 \\ f''_{yy} &= 2 \end{aligned}}$$

__Resultat:__

Hvis i) $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$ for alle x,y

og ii) $f''_{xx} \geq 0$ for alle x,y
$f''_{yy} \geq 0$

Så er f __konveks__

Hvis i) $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$ for alle x,y

og ii) $f''_{xx} \leq 0$ for alle x,y
$f''_{yy} \leq 0$

Så er $f(x,y)$ konkav.

__Eks:__ $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\boxed{\begin{aligned} f''_{xx} &= 2 & f''_{xy} &= 0 \\ f''_{xy} &= 0 & f''_{yy} &= 2 \end{aligned}}$$

$f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 \geq 0$ V

$f''_{xx}, f''_{yy} \geq 0 \Rightarrow f$ __konveks__

__Eks:__ $f(x,y) = ax + by + c$

$$\boxed{\begin{aligned} f''_{xx} &= 0 & f''_{xy} &= 0 \\ f''_{xy} &= 0 & f''_{yy} &= 0 \end{aligned}}$$