FORELESNING 3

ELE 3719

EIVIND ERIKSEN JAN 22 2013 MATEMATIKK

PLAN:

Lærebok:

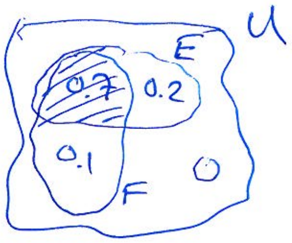
1. Gjennomgang Oppgaveark I
2. Stokastiske variable [R] 2.1

---

1. Oppgaveark I: Gjennomgang oppgave 8, 12, 14, 46

(8) $p(E) = 0.9$, $p(F) = 0.8$ Vis at $p(E \cap F) \geq 0.7$

og generelt: $p(E \cap F) \geq p(E) + p(F) - 1$



$p(E \cap F) = 0.7$: $p(E \cap F^c) = 0.2$

$p(F \cap E^c) = 0.1$

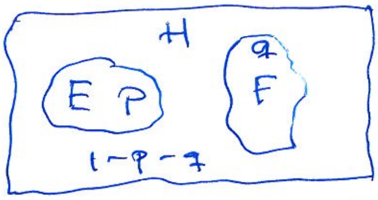
$p(E^c \cap F^c) = 0$

Bevis: $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) \leq 1$

Bonferroni's ulikhet: $\boxed{p(E \cap F) \geq p(E) + p(F) - 1}$

I eks: $p(E \cap F) \geq 0.8 + 0.9 - 1 = 0.7$

(12)



$U = E \cup F \cup H$

↑ utfall hverken i E eller F

$$p(E) = p$$
$$p(F) = q$$

$p(H) = 1-p-q$

Superforsøk:

$\{E, F, HE, HF, HHE, HHF, \ldots\}$ ← utfallsrom

$$p(E \text{ før } F) = p(\{E, HE, HHE, HHHE, \ldots\})$$

$$= p(E) + p(HE) + p(HHE) + \ldots$$

$$= p + (1-p-q)\cdot p + (1-p-q)^2\cdot p + \ldots$$

antar at forsøkene er uavhengige

E_1 og E_2 er uavh

$$\Updownarrow$$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\cdot p(E_2)$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p-q)} = \frac{p}{p+q} = \underline{\underline{\frac{p(E)}{p(E)+p(F)}}}$$

Geometrisk rekke:

$a_0 = p$, $k = 1-p-q$ $\rightarrow S = \dfrac{a_0}{1-k}$ når $|k|<1$

$k = p(H) < 1$ siden $p(H)=1$ gir $\begin{cases} p(E)=0 \\ p(F)=0 \end{cases}$

14

Sannsynlighet for å
vinne i et enkelt kast : p
tape — " — : $1-p$

A B

A vinner → B vinner → A vinner → ...

$U = \{A, AB, ABA, ABAB, \dots\}$

$p(\text{A vinner}) = p(\{A, ABA, ABABA, \dots\})$

$= p(A) + p(ABA) + p(ABABA) + \dots$

kasten er uavhengige → $= p + (1-p)\cdot(1-p)\cdot p + (1-p)^4 \cdot p + \dots$

geometrisk rekke → $= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-2p+p^2)}$

$= \frac{p}{2p-p^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2-p}}}$

$p(\text{B vinner}) = \underline{\underline{\frac{1-p}{2-p}}}$

$\left(\begin{array}{lll} p = 1/2: & p(A) = 2/3 & p(B) = 1/3 \\ p = 1/3: & p(A) = 3/5 & p(B) = 2/5 \end{array} \right)$

(46) (A) (B) (C)

BI

Anta at fengevokteren forteller A hvem som frigis.

B henrettes → f. sier C
C —"— —"— B
A henrettes → f —"— B eller C

$$p(\text{A henrettes} \mid \text{fangev. sier at B frigis})$$

$$= \frac{p(\text{A henrettes og f. sier at B frigis})}{p(\text{fangev. sier at B frigis})}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 1/2} \leftarrow p(\text{f. sier } B \mid A) \cdot p(A)$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/3 \cdot 3/2} = \frac{1/3 \cdot \cancel{1/2}}{\cancel{1/2}} = \underline{\underline{1/3}}$$

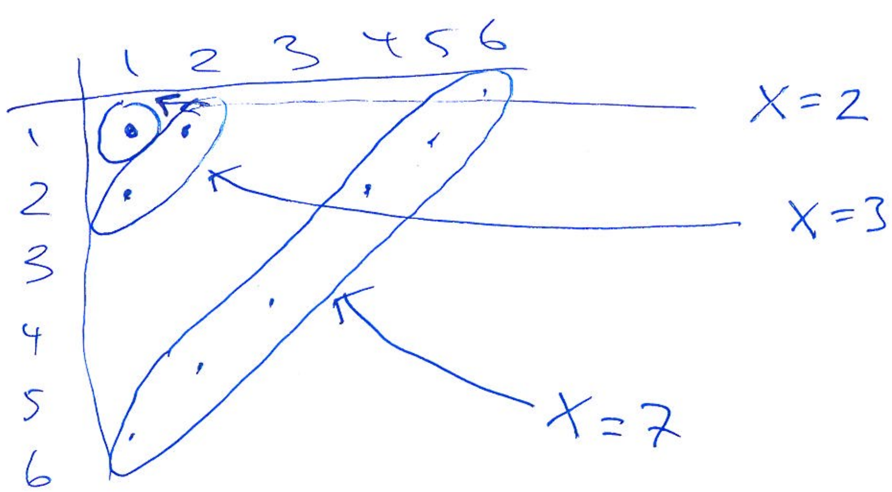
(2) Stokastiske variable ([R] 2.1)

En **stokastisk variabel** X er en variabel som tar tallverdier som avhenger av utfallet i et stokastisk forsøk.

Gitt et stokastisk forsøk med utfallsrom $U = \{\omega_i\}$, så er X en funksjon

$$\boxed{\begin{aligned} X : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega_1 &\longmapsto X(\omega_1) \\ \omega_2 &\longmapsto X(\omega_2) \\ &\ \vdots \end{aligned}}$$

Eks I: Vi kaster to terninger
$X =$ summen av terningene



$p(X=7) = \frac{1}{6}$

Eks 2: Vi kaster mynt og kron to ganger

X = antall mynt

$$U = \{MM, \underbrace{MK, KM}, KK\}$$

$$X=2 \qquad X=1 \qquad X=0$$

$$p(X=2) = 1/4 \quad p(X=1) = 1/2 \quad p(X=0) = 1/4$$

Eks 3: Vi kaster helt til vi får Mynt.

X = antall kast

$$U = \{M, KM, KKM, \ldots\}$$

$$x=1 \qquad x=2 \qquad x=3 \qquad \ldots$$

Eks 4: X = levetiden til en bil (i år)

kontinuerlig spektrum av mulige verdier for X $[0, \infty)$

diskrete stokastiske variable	(Eks 1-3)	Mulige verdier for X er diskret mengde (dvs endelig eller "som naturlige tall")
kontinuerlige stokastiske variable	(Eks 4)	Mulige verdier for X er kontinuerlig spektrum (dvs intervall)

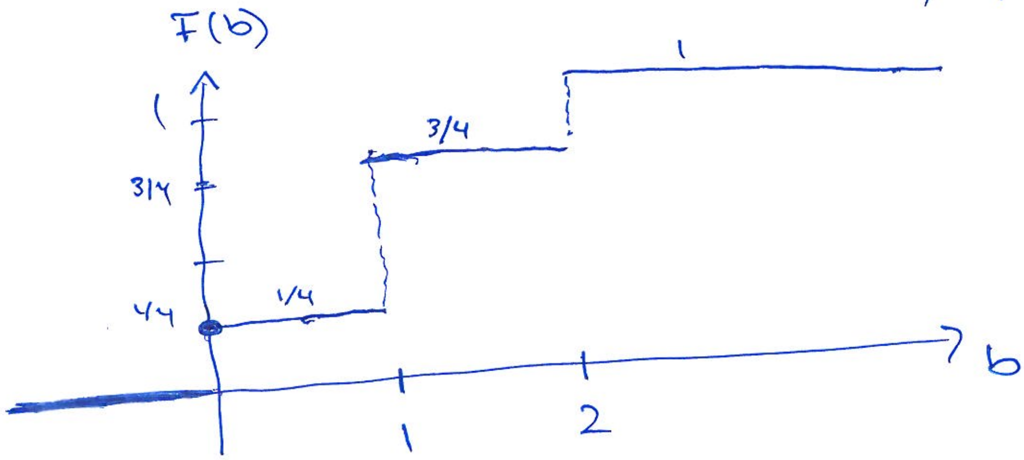
Den kumulative fordelingsfunksjonen til X (cdf)

$F_X(b) := p(X \le b)$ for ethvert tall b

Eks: Vi kaster mynt/kron to ganger

X = antall mynt

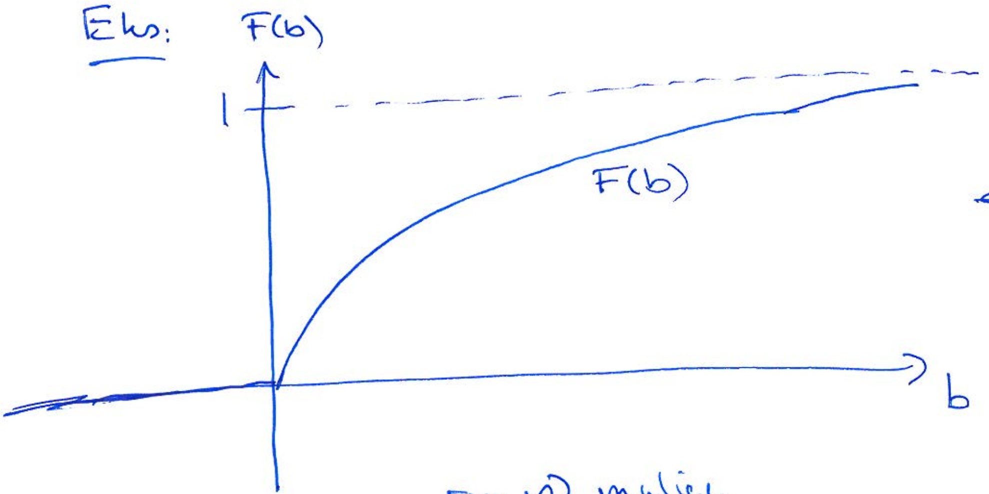
$$\begin{cases} p(X=0) = 1/4 \\ p(X=1) = 1/2 \\ p(X=2) = 1/4 \end{cases}$$



$F(0) = p(X \le 0) = 1/4$

$F(1) = p(X \le 1) =$

Eks:



kont. stokastisk variabel

$[0, \infty)$ mulige verdier

Egenskaper som alle cdf'er har:

i) $F(b)$ er en ikke-avtagende funksjon
(dvs hvis $b_1 \leq b_2$ så er $F(b_1) \leq F(b_2)$)

ii) $\lim_{b \to \infty} F(b) = 1$

iii) $\lim_{b \to -\infty} F(b) = 0$

Stokastiske variabler: Diskret tilfelle

$p(X=x)$: punktsannsynlighet

$$p(X=0) = 1/4$$
$$p(X=1) = 1/2$$
$$p(X=2) = 1/4$$

punktsannsynligheter

$f(b) := p(X=b)$ (sannsynlighetstetthet)

$$F(b) = p(X \leq b) = \sum_{i \leq b} p(X=i)$$
$$= p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + \ldots + p(X=b)$$
$$= f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(b)$$
$$= \sum_{i \leq b} f(b)$$

Vanlige diskrete sannsynlighetsfordelinger:

- binomisk
- geometrisk
- Poisson
- uniform