FORELESNING 6 — ELE 3719

EIVIND ERIKSEN

JAN 31 2013 — MATEMATIKK

BI

PLAN:

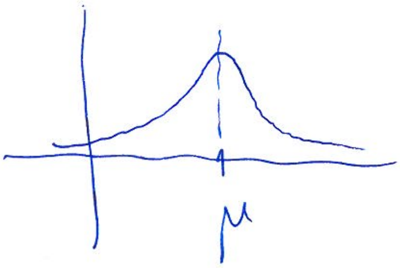
1. Normalfordeling (fortsettelse fra sist)
2. Oppsummering kontinuerlige stok. variable
3. Forventning og varians

Lærebok:

[R] 2.3.4, 2.4

---

① **Normalfordeling:** $X \sim Norm(\mu, \sigma)$ $\begin{cases} \mu : \text{vilkårlig} & (\text{forventning}) \\ \sigma > 0 & (\text{std. avvik}) \end{cases}$

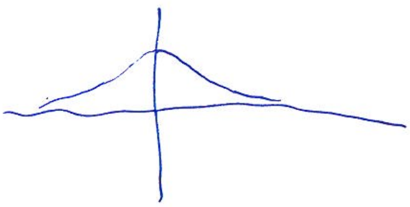


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{for alle } x$$

(vanskelig å integrere!)

Kan bevise at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Spesialtilfelle: $X \sim Norm(0,1)$ $\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$ standard normalfordeling



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Faktum: $X \sim Norm(\mu, \sigma)$ gir $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim Norm(0,1)$

Oppsummering: Kontinuerlige (og diskrete) stokastiske variable

	diskret	kontinuerlig
Defn. av sannsynlighetstetthet $f(x)$	$f(x) = p(x) := P(X=x)$	$f(x)$ er funksjon slik at $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
kumulativ fordeling $F(b)$	$F(b) := P(X \leq b) = \sum_{a \leq b} P(X=a)$	$F(b) := P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$
Krav til $f(x)$:	i) $f(x) \geq 0$ ii) $\sum_x f(x) = 1$	i) $f(x) \geq 0$ ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
		Merk: $P(X=a) = 0$!

3) Forventning og varians

X : stokastisk variabel

Forventningen til X:

$E(X) = E[X]$ = forventningsverdien til X

= vektet gjennomsnittsverdi for X, med sannsynligheter som vekter

Diskret: X er diskret

$x \cdot f(x)$

$$E(X) = \sum_{x} x \cdot p(X=x) = x_1 \cdot p(X=x_1) + x_2 \cdot p(X=x_2) + \ldots$$

↑ sum over alle mulige verdier (dvs: x slik at $f(x) > 0$)

Eks: X = antall øyne på en terning

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{3.5}$$

Eks: X = summen av antall øyne på to terninger

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots + 12 \cdot 1}{36} = \underline{\underline{7}}$$

<u>Kontinuerlig:</u> X er kontinuerlig

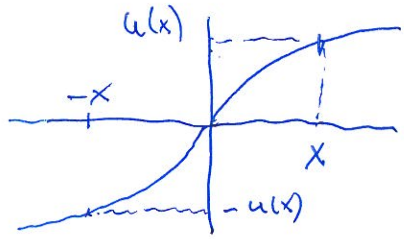
$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

<u>Eks:</u> $X \sim \text{Norm}(0,1)$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

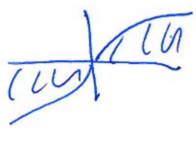
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x e^{-x^2/2}}_{u(x)} dx = 0$$

Ser at $u(-x) = (-x) \cdot e^{-(-x)^2/2} = -x e^{-x^2/2} = -u(x)$



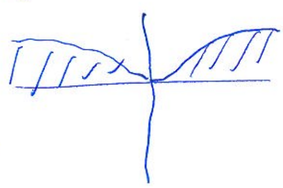
Hvis $u(-x) = -u(x)$, dvs u er <u>odde</u> funksjon, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dx = 0$$

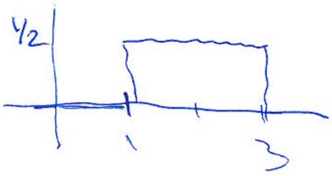


Hvis $u(-x) = u(x)$, dvs u er <u>jevn</u> funksjon, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} u(x)\, dx$$



<u>Eks:</u> $X \sim \text{Uniform}\ [1,3]$



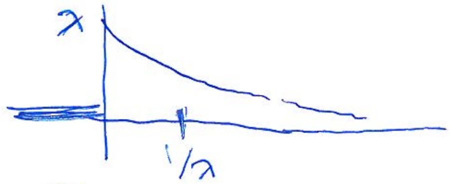
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [1,3] \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{1}^{3} x \cdot \frac{1}{2}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^3 = \frac{3^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{8}{4} = \underline{\underline{2}}$$

Ex: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \cdot \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty}$$

$$\int x e^{-\lambda x}\,dx = \overbrace{\int u \cdot v'\,dx = uv - \int u' v\,dx}^{\text{delvis integrasjon}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & v = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \\ u' = 1 & v' = e^{-\lambda x} \end{array}}$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda x} - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda x}\,dx$$

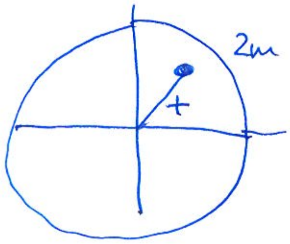
$$= -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + C$$

$$= \lim_{b \to \infty} \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^b \overset{\lim_{b\to\infty}}{=} \left(-b e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda b} \right) - \left(-\frac{1}{\lambda} e^0 \right)$$

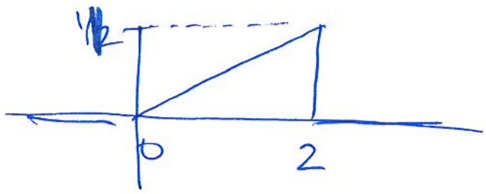
$$= \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \underbrace{e^{-\lambda b}}_{= \frac{1}{e^{\lambda b}} \to 0} - \underbrace{b e^{-\lambda b}}_{= \frac{b}{e^{\lambda b}} \to 0} \right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cdot 0 - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

Eks:



(se Foreleson. 5)

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in [0,2]$$



$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \underbrace{\frac{x}{2}}_{f(x)} \, dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2$$

$$= \frac{2^3}{6} - \frac{0}{6} = \frac{8}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Eks: $X \sim \text{Binom}(n, p)$

$$E(x) = \sum_x x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$= 1 \cdot \binom{n}{1} p \cdot (1-p)^{n-1} + 2 \cdot \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \ldots =$$

$$\ldots = \underline{\underline{np}}$$

utledning kan enten gjøres ved hjelp
av direkte utregninger med sum-notasjon (eks 2.17 i [R])
eller ved hjelp av teori som vi snart kommer til (mye enklere)

Forventning til en funksjon av X :

Eks: Vi kaster en terning

X = antall øyne

$Y = X^2 - 7$ ← Stokastisk variabel, funksjon av X

X	$p(X=x)$	Y	$p(Y=y)$
1	1/6	−6	1/6
2	"	−3	"
3	"	2	"
4	"	9	"
5	"	18	"
6	"	29	"

$$E(Y) = \sum_y y \cdot P(Y=y) = (-6)\cdot\frac{1}{6} + (-3)\cdot\frac{1}{6} + \dots + 29\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \sum_x (x^2-7)\cdot p(X=x) = (-6)\cdot\frac{1}{6} + (-3)\cdot\frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{x=1}^{6} (x^2-7)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 - 7 = \frac{\left(\sum_{x=1}^{6} x^2\right) - 7\cdot 6}{6}$$

$$= \frac{49}{6} \simeq \underline{\underline{8.17}}$$

Defn: Forventningen til $g(X)$, en funksjon av X

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) \cdot p(X=x) & \leftarrow \text{diskret tilfelle} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx & \leftarrow \text{kont. tilfelle} \end{cases}$$

Varians: $\begin{cases} X & \text{stokastisk variabel} \\ \mu = E(X) \end{cases}$ $\quad (\mu = \mu_X)$

$Var(X) = E[(X-\mu)^2] \geq 0$ variansen til X

$\sqrt{Var(X)} = \text{stdev}(X) = \sigma$ std. avvik til X $(\sigma = \sigma_X)$

Vi fortsetter med $E[g(X)]$ og varians neste gang.