Eivind Eriksen

Matriser og Kvadratiske Former

15. mars 2012

Handelshøyskolen BI

Innhold

1 Matriser og vektorer ... 1
1.1 Matriser ... 1
1.2 Matriseaddisjon ... 2
1.3 Matrisesubtraksjon ... 3
1.4 Skalarmultiplikasjon ... 3
1.5 Vektorer ... 4
1.6 Matrisemultiplikasjon ... 5
1.7 Determinanter ... 6
1.8 Inverse matriser ... 8
1.9 Lineære systemer og matriser ... 8
1.10 Egenverdier og egenvektorer ... 9

2 Kvadratiske Former ... 13
2.1 Kvadratiske former ... 13
2.2 Definitthet for kvadratiske former ... 14
2.3 Derivasjon av kvadratiske former ... 15
2.4 Anvendelse: Lineær regresjon ... 16
2.5 Anvendelse: Kovariansmatriser ... 18

Kapittel 1
Matriser og vektorer

1.1 Matriser

En *matrise* er en rektangulær tabell av tall. En matrise som består av m rader og n kolonner kalles en $m \times n$-matrise, eller en matrise av størrelse (m,n). Typiske eksempler på matriser er

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisene M og N ovenfor har størrelse henholdsvis $(2,2)$ og $(2,3)$. Det er vanlig å bruke store bokstaver for å betegne matriser.

Dersom A er en matrise, refererer a_{ij} til elementet i matrisen A i rad i og kolonne j. For eksempel er $m_{21} = 3$ og $n_{13} = 0$ i matrisene ovenfor. Vi kan dermed skrive en $m \times n$-matrise A som

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Noen ganger bruker vi også den kortere skrivemåten $A = (a_{ij})$. En $m \times n$-matrise med $m = n$ (like mange rader som kolonner) kalles en *kvadratisk matrise*.

To matriser A og B er *like* hvis A og B har samme størrelse (m,n) og hvis $a_{ij} = b_{ij}$ for alle $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. I så fall skriver vi $A = B$.

La $m \times n$-matrisen A være gitt. Den *transponerte matrisen* A^T er en $n \times m$-matrise som framkommer ved å la kolonnene i A^T være radene i A, slik at

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

For eksempel er den transponerte til matrisen N ovenfor gitt ved

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad N^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Det er også vanlig å skrive A^t eller A' for den transponerte matrisen A^T.

En kvadratisk matrise A kalles *symmetrisk* dersom $A^T = A$ og *anti-symmetrisk* dersom $A^T = -A$. Er matrisen M ovenfor symmetrisk? Vi undersøker dette ved å regne ut den transponerte matrisen M^T og sammenlikne den med M:

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

Siden $M^T \neq M$, følger det at matrisen M *ikke* er symmetrisk.

1.2 Matriseaddisjon

La $A = (a_{ij})$ og $B = (b_{ij})$ være matriser av samme størrelse (m,n). Da definerer vi *summen* $A+B$ til å være $m \times n$-matrisen som framkommer ved å addere elementene i A og B posisjon for posisjon:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Dersom A og B er matriser av ulik størrelse, så er summen $A+B$ ikke definert. Et typisk eksempel på matriseaddisjon er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Matrisen A av størrelse (m,n) med $a_{ij} = 0$ for alle i, j kalles *nullmatrisen*. Vi skriver $0 = 0_{m \times n}$ for å betegne nullmatrisen.

Proposition 1.1. *La A, B og C være matriser av samme størrelse. Da har vi:*

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+0 = 0+A = A$
3. $A+B = B+A$
4. $(A+B)^T = A^T + B^T$

1.3 Matrisesubtraksjon

La $A = (a_{ij})$ og $B = (b_{ij})$ være matriser av samme størrelse (m,n). Da definerer vi *differansen* $A - B$ til å være $m \times n$-matrisen som framkommer ved å subtrahere elementene i A og B posisjon for posisjon:

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

Dersom A og B er matriser av ulik størrelse, så er differansen $A - B$ ikke definert. Et typisk eksempel på matrisesubtraksjon er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1.4 Skalarmultiplikasjon

La $A = (a_{ij})$ være en matrise av størrelse (m,n) og la r være et tall. Da definerer vi produktet $r \cdot A = rA$ til å være $m \times n$-matrisen som framkommer ved å multiplisere tallet r med elementene i A posisjon for posisjon:

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

Dette kalles skalarmultiplikasjon ettersom r er en *skalar* (et tall) i motsetning til en matrise. Et typisk eksempel på skalarmultiplikasjon er

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Dersom A er en matrise, skriver vi $-A$ for matrisen $(-1)A$.

Proposition 1.2. *La A og B være matriser av samme størrelse og la r, s være tall. Da har vi:*

1. $A + (-B) = A - B$
2. $A + (-A) = (-A) + A = 0$
3. $r(A + B) = rA + rB$
4. $(r + s)A = rA + sA$
5. $(rs)A = r(sA)$

6. $1 \cdot A = A$
7. $(rA)^T = rA^T$

1.5 Vektorer

En *vektor* er en matrise som består av én kolonne. En vektor som inneholder m rader, altså en $m \times 1$-matrise, kalles også en m-vektor. En typisk vektor er

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Denne vektoren er en 3-vektor. Vi bruker ofte uthevede små bokstaver for å betegne vektorer. Vektorer, slik de er definert ovenfor, kalles også *kolonnevektorer*. Man kan også betrakte radvektorer, som er en matrise som består av én rad, men det skal vi ikke bruke i dette notatet.

Siden vektorer spesielt er matriser, kan vi regne med vektorer på samme måte som med matriser. Vi kan derfor addere og subtrahere vektorer av samme størrelse, og dessuten utføre skalarmultiplikasjon av en skalar og en vektor.

En viktig tolkning av vektorer er at de svarer til punkter i et koordinatsystem. For eksempel svarer punktet $(x,y) = (2,1)$ i et todimensjonalt koordinatsystem til 2-vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mer generelt svarer punktet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i et n-dimensjonalt koordinatsystem til en n-vektor $\mathbf{x}$.

La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ være en samling av m-vektorer. Vi definerer en *lineær kombinasjon* av disse vektorene til å være et uttrykk på formen

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

der $a_1, a_2, \dots, a_n$ er tall. Enhver lineær kombinasjon av m-vektorer er dermed en m-vektor. Et typisk eksempel på en lineær kombinasjon er

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er *lineært avhengige* dersom minst én av vektorene kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre vektorene, og *lineært uavhengige* ellers.

Proposition 1.3. *Vektorene* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *er lineært uavhengige hvis og bare hvis vektor-likningen*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

1.6 Matrisemultiplikasjon

La $A = (a_{ij})$ være en $m \times n$-matrise og la $B = (b_{ij})$ være en $n \times p$-matrise. Da definerer vi *produktet* $A \cdot B = AB$ til å være matrisen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

av størrelse (m, p), hvor c_{ij} er gitt ved

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

for $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$. Hvis antall kolonner i A ikke sammenfaller med antall rader i B, så er produktet AB ikke definert. Et typisk eksempel på en matrisemultiplikasjon er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 15 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Vi merker oss at denne definisjonen ikke er symmetrisk — bytter vi om rollene til A og B blir matrisemultiplikasjonen helt annerledes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{er ikke definert}$$

Selv i de tilfellene der både AB og BA er definert, har vi vanligvis at $AB \neq BA$. Rekkefølgen av faktorene er derfor viktig i matrisemultiplikasjon.

Matrisen A av størrelsen (n,n) med $a_{ij} = 1$ når $i = j$ og $a_{ij} = 0$ når $i \neq j$ kalles *identitetsmatrisen*. Vi skrives $I = I_n$ for denne matrisen. For eksempel har vi at

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den rollen som tallene 0 og 1 har i vanlig regning (som additiv og multiplikativ enhet) har nullmatrisen og identitetsmatrisen i matriseregning.

Proposition 1.4. *La A, B og C være matriser slik at uttrykkene nedenfor er definert, og la r være et tall. Da har vi:*

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB+AC$
3. $(A+B)C = AC+BC$
4. $A(rB) = (rA)B = r(AB)$
5. $AI = IA = A$
6. $(AB)^T = B^T A^T$

La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise og la $m \geq 1$ være et positivt heltall. Vi definerer da matrisepotensen A^m til å være den kvadratiske matrisen av størrelse (n,n) som framkommer ved å multiplisere matrisen A med seg selv m ganger:

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m}$$

For $m = 0$ så definerer vi at $A^0 = I$. Et typisk eksempel på en matrisepotens er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

1.7 Determinanter

La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise. Da kan man definere determinanten til A, som skrives $\det(A)$ eller $|A|$. Determinanten $\det(A)$ er et tall for hver kvadratisk matrise A.

Flere ulike definisjoner av determinanter er mulige. For $n = 2$ er determinanten gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Det finnes tilsvarende uttrykk for determinanten $\det(A)$ når $n > 2$, men det generelle uttykket er nokså komplisert. Derfor lønner det seg å benytte en alternativ definisjon av determinanten $\det(A)$ når $n > 2$, og vi skal benytte *kofaktorer* til å gi en slik alternativ definisjon.

En *minor* av orden $p < n$ er determinanten til undermatrisen som framkommer ved å velge ut p rader $i_1, i_2, \ldots, i_p$ og p kolonner $j_1, j_2, \ldots, j_p$ i A. En slik minor av orden p er dermed gitt som

$$M^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \ldots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \ldots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \ldots & a_{i_p,j_p} \end{vmatrix}$$

Gitt en minor av orden p, så er den komplementære minoren av orden $n-p$ minoren som frakommer ved å velge ut de resterende $n-p$ rader og de resterende $n-p$ kolonner i A.

Vi definerer *kofaktoren* C_{ij} for $1 \leq i,j \leq n$ som $C_{ij} = (-1)^{i+j}M(i,j)$, der $M(i,j)$ er den komplementære minoren til minoren a_{ij} av orden 1. Vi bemerker at minoren $M(i,j)$ har orden $n-1$. Da er determinanten til A definert som

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Vi kaller dette uttrykket for *kofaktorutviklingen* til A langs første rad. Dette er en *rekursiv definisjon*, ettersom determinanten til A (som er en determinant av orden n) defineres ved hjelp av kofaktorer, som er gitt av determinanter av orden $n-1$. Et typisk eksempel på en determinant er

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 + 1 = 12$$

Vi ser at en determinant av orden 3 uttrykkes ved hjelp av determinanter av orden 2, som vi kan regne ut ved hjelp av formelen ovenfor. Dersom vi skal regne ut en determinant av orden $n > 3$, må vi bruke en tilsvarende rekursjon i flere steg. For eksempel kan en determinant av orden fire uttrykkes ved hjelp av kofaktorer, som er gitt ved determinanter av orden tre. Hver av disse determinantene kan i sin tur uttrykkes ved hjelp av determinanter av orden to.

Theorem 1.1. *La A være en matrise av type (n,n). Da har vi:*

1. *For $1 \leq i \leq n$ så er $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$.*
2. *For $1 \leq j \leq n$ så er $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$.*

Uttrykkene i teoremet kalles henholdsvis kofaktorutviklingen til A langs rad i og kofaktorutviklingen til A langs kolonne j. Teoremet innebærer at determinanten kan uttrykkes som kofaktorutviklingen langs en vilkårlig rad eller kolonne.

Proposition 1.5. *La A og B være matriser kvadratiske matriser av type (n,n) og la r være et tall. Da har vi:*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\det(rA) = r^n \det(A)$
3. $\det(A^T) = \det(A)$

En kvadratisk $n \times n$-matrise A er *diagonal* dersom $a_{ij} = 0$ når $i \neq j$. En typisk diagonal matrise er

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi kaller posisjonene $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ i matrisen A for *digagonalen*, og ser at diagonale matriser er karakterisert ved at de er null utenfor diagonalen.

Proposition 1.6. *La A, B være diagonale $n \times n$-matriser. Da har vi:*

1. $AB = BA$
2. $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

1.8 Inverse matriser

La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise. Vi sier at A er *invertibel* hvis det fins en matrise B slik at $AB = BA = I$. I så fall er B en kvadratisk $n \times n$-matrise som er entydig bestemt av A. Matrisen B kalles da den *inverse matrisen* til A, og vi skriver ofte $A^{-1} = B$ for den inverse matrisen til A. Et typisk eksempel på en invers matrise er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

siden dette gir $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Vi definerer *kofaktormatrisen* til en kvadratisk matrise A til å være matrisen C som består av alle kofaktorene $C = (C_{ij})$ til A, og den *adjungerte matrisen* til A til å være den transponerte matrisen til kofaktormatrisen, $\mathrm{adj}(A) = C^T$. Da følger det fra kofaktorutviklingene til determinanten til A at

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Dermed får følgende resultat:

Proposition 1.7. *La A være en kvadratisk matrise. Da er A invertibel hvis og bare hvis* $\det(A) \neq 0$. *I så fall har vi at*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$

Proposition 1.8. *La A og B være invertible matriser og la $r \neq 0$ være et tall. Da har vi:*

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(rA)^{-1} = r^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

1.9 Lineære systemer og matriser

Et *lineært system*, eller et system av lineære likninger, kan skrives på matriseform som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Et typisk eksempel er likningssystemet

$$\begin{array}{r} x+\ \ y-\ \ z=0 \\ x-\ \ y+\ \ z=2 \\ x-2y+4z=3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrisen A kalles *koeffisientmatrisen* til det lineære systemet. Dette er en $m \times n$-matrise, der m er antall likninger og n er antall variable i det lineære systemet.

Proposition 1.9. *La $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ være et lineært system som består av m lineære likninger i n variable. Hvis $m = n$ og $\det(A) \neq 0$, så har systemet nøyaktig én løsning, gitt ved*

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Proposition 1.10. *La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en samling av m-vektorer, og la A være $m \times n$-matrisen med disse vektorene som kolonner. Hvis $m = n$, så er vektorene lineæart uavhengige hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.*

1.10 Egenverdier og egenvektorer

La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise. Vi sier at tallet λ er en *egenverdi* for A dersom det finnes en n-vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som løser likningen

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

I så fall kalles $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for A med egenverdi λ.

Legg merke til at venstre side i likningen er en matrisemultiplikasjon, som gir en n-vektor som svar, mens høyre side er en skalarmultipplikasjon, som også gir en n-vektor som svar. Vi må derfor skrive om likningen på følgende måte:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Vi vet at denne likningen har nøyaktig én løsning hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$, og uendelig mange løsninger hvis $\det(A - \lambda I) = 0$. Det følger derfor at egenverdiene til A er løsningene til likningen

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Denne likningen kalles den *karakteristiske likningen* til A. Det er en likning av grad n i λ. Et typisk eksempel på en karakteristisk likning er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir andregradslikningen $(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, som har løsninger $\lambda = 3$ og $\lambda = -1$. Dermed er $\lambda = 3$ og $\lambda = -1$ egenverdiene til A.

For en kvadratisk $n \times n$-matrise $A = (a_{ij})$, definerer vi *sporet* til A til å være $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Sporet er altså summen av tallene på diagonalen.

Proposition 1.11. *La A være en 2×2-matrise. Da er den karakteristiske likningen til A gitt ved $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$.*

Proposition 1.12. *La A være en kvadratisk $n\times n$-matrise. Hvis A har egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, så har vi*

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad \text{og} \quad \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

Merk at ikke alle matriser har egenverdier (blant de vanlige reelle tallene), ettersom ikke alle likninger har løsninger. Som et eksempel, la oss se påfølgende matrise:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Vi ser at denne matrisen ikke har noen egenverdier siden $\lambda^2 + 1 = 0$ gir likningen $\lambda^2 = -1$, som ikke har løsning (blant de vanlige reelle tallene).

Proposition 1.13. *La A være en symmetrisk $n\times n$-matrise. Da har har matrisen A egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Når vi har funnet egenverdiene til en kvadratisk matrise A, kan vi finne egenvektorene ved å løse det lineære likningssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for hver egenverdi λ. Skal vi for eksempel finne egenvektorene til 2×2-matrisen A ovenfor, tar vi utgangspunkt i egenverdiene $\lambda = 3$ og $\lambda = -1$ som vi fant tidligere. Egenvektorene for $\lambda = 3$ er løsningene av $(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, som gir

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad -2v_1 + 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siden v_2 er en fri variabel i dette likningssystemet. Egenvektorene for $\lambda = -1$ kan finnes på tilsvarende måte.

Oppgaver

1.1. Regn ut $A + B$ og $3A - 2B$ når $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. Løs matriselikningen $2A + 3X = I$ for X når $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.3. Regn ut AB og BA når $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. Regn ut $A^2 - 2A$ når $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.5. Finn determinanten $\det(A)$ til matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.6. Beregn $\det(A)$ ved hjelp av kofaktorutvikling når $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1.7. Sjekk om matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ er invertibel, og regn i så fall ut A^{-1}.

1.8. Finn en formel for den inverse matrisen til $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ når $\det(A) \neq 0$.

1.9. Regn ut A^T og $(A^{-1})^T$ når $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

1.10. Vis at matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ er invertibel, og regn ut A^{-1}.

Kapittel 2
Kvadratiske Former

2.1 Kvadratiske former

La $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ være en funksjon i n variable. Vi sier at funksjonen f er en *kvadratisk form* hvis f er en polynomfunksjon der alle ledd har grad to. Det er vanlig å bruke navnet Q for en kvadratisk form. En kvadratisk form i n variable kan derfor skrives på formen

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \cdots + c_{1n}x_1x_n + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + \cdots + c_{nn}x_n^2$$

der $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{nn}$ er tall. Tallene c_{ij} for $i \leq j$ kalles koeffisientene til den kvadratiske formen Q. En kvadratisk form i $n = 3$ variable kan for eksempel skrives som

$$Q(x_1, x_2, x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2$$

der $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}$ er tall.

Enhver kvadratisk form kan skrives på matriseform. Vi legger merke til at dersom $A = (a_{ij})$ er en $n \times n$-matrise, og vi skriver $\mathbf{x}$ for vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

som består av de n variablene, så har vi at matriseproduktet

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gir en 1×1-matrise, som inneholder uttrykket

$$a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + (a_{13}+a_{31})x_1x_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

siden a_{ij} i matrisen A multipliseres med x_i fra venstre og x_j fra høyre. Dette er en kvadratisk form med koeffisienter $c_{ii} = a_{ii}$ og $c_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ når $i < j$. Hvis vi starter med en kvadratisk form $Q(\mathbf{x})$ med koeffisienter c_{ij}, kan vi derfor skrive

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$$

om vi velger matrisen A slik at $a_{ii} = c_{ii}$ og $a_{ij} + a_{ji} = c_{ij}$ når $i < j$. Det finnes flere muligheter for valg av A. Ønsker vi derimot at A skal være en symmetrisk matrise, med $a_{ij} = a_{ji}$, så må vi velge $a_{ii} = c_{ii}$ og $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$ når $i < j$.

Proposition 2.1. *La $Q(\mathbf{x})$ være en kvadratisk form i n variable. Da fins en entydig symmetrisk $n \times n$-matrise A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$.*

For eksempel kan den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$ i tre variable skrives som

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} \quad \text{der} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi velger $a_{11} = 1$ siden koeffisienten foran x_1^2 er $c_{11} = 1$, og $a_{12} = a_{21} = 1$ siden koeffisienten foran x_1x_2 er $c_{12} = 2$. De andre elementene i matrisen A finner vi på tilsvarende måte. Matrisen A kalles den *symmetriske matrisen* til den kvadratiske formen Q.

2.2 Definitthet for kvadratiske former

La $Q(\mathbf{x})$ være en kvadratisk form i n variable, med tilhørende symmetrisk matrise A. Vi sier at Q (og matrisen A) er

- *positiv semidefinit* hvis $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$
- *negativ semidefinit* hvis $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ for alle $\mathbf{x}$
- *indefinit* hvis Q hverken er positiv eller negativ semidefinit

Altså er Q indefinit hvis det finnes to vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ slik at $Q(\mathbf{x}_1) > 0$ og $Q(\mathbf{x}_2) < 0$. For enhver kvadratisk form Q gjelder det at $Q(\mathbf{0}) = 0$. Vi sier at Q (og matrisen A) er

- *positiv definit* hvis $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- *negativ definit* hvis $Q(\mathbf{x}) < 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Legg merke til at hvis en kvadratisk form er positiv (semi)definit, så er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et minimum, og hvis den er negativ (semi)definit, så er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et maksimum.

Den kvadratiske formen $Q(x,y) = 3x^2 + 2y^2$ er helt klart positiv definit, siden $3x^2 + 2y^2 \geq 0$ for alle (x,y), og $3x^2 + 2y^2 > 0$ hvis $(x,y) \neq (0,0)$. Det er ikke så lett å avgjøre om $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit.

Proposition 2.2. *La $Q(\mathbf{x})$ være en kvadratisk form i n variable med symmetrisk matrise A, og la $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ være egenverdiene til A. Da har vi:*

- *Q er positiv semidefinit hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$*
- *Q er positiv definit hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$*
- *Q er negativ semidefinit hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$*
- *Q er negativ definit hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$*
- *Q er indefinit hvis og bare hvis A har både positive og negative egenverdier*

La oss igjen se på den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$. Den har symmetrisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi kan avgjøre hva slags type den kvadratiske formen har ved å regne ut egenverdiene til A. Vi får

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

Dette gir egenverdier $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$. Dermed er den kvadratiske formen Q indefinit.

2.3 Derivasjon av kvadratiske former

La $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$ være en kvadratisk form i n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vi kan da regne ut de partielle deriverte $Q'_i = \partial Q / \partial x_i$. Skal vi gjøre dette ved hjelp av matriser, lønner det seg å skrive de partielle deriverte av Q som en vektor:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ \vdots \\ Q'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial Q / \partial x_1 \\ \partial Q / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial Q / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Bruker vi denne skrivemåten, så finner vi at kvadratiske former har partielle deriverte gitt ved følgende uttrykk:

Proposition 2.3. *La $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$ være en kvadratisk form gitt ved en $n \times n$-matrise A. Da har vi at*

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = \left(A + A^T\right)\mathbf{x}$$

Dersom A er den symmetriske matrisen til den kvadratiske formen Q, så følger det dermed at

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x}$$

En lineær form i n variable er en polynomfunksjon der alle leddene er av grad én, og kan derfor skrives som $L(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, der B er en $1 \times n$-matrise. Det er lett å se at de partielle deriverte av $L(\mathbf{x})$ er elementene i B, slik at

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = B^T$$

En kvadratisk polynomfunksjon i n variable kan skrives som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$, der A er en symmetrisk $n \times n$-matrise, B er en $1 \times n$-matrise og C er en 1×1-matrise (en konstant). De partielle deriverte til en slik funksjon er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T$$

Stasjonære punkter for en slik kvadratisk polynomfunksjon er dermed gitt ved likningen $2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0}$. Dette er et lineært likningsssytem, og det har eksakt en løsning hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$. Dersom $\mathbf{x}^*$ er et stsjonært punkt, kan vi finne dets type ved å se på den symmetriske matrisen A:

- Hvis A er positiv (semi)definit, så er $\mathbf{x}^*$ et minimum
- Hvis A er negativ (semi)definit, så er $\mathbf{x}^*$ et maksimum
- Hvis A er indefinit, så er $\mathbf{x}^*$ et sadelpunkt

2.4 Anvendelse: Lineær regresjon

Utgangspunktet for *lineær regresjon* er at vi ønsker å finne en lineær funksjon som beskriver sammenhengen mellom variabelen y og variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ på en best mulig måte. Vi bruker altså modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

der $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ er tall. Vi tenker oss at vi har et datasett på formen

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	y
x_{11}	x_{21}	$\ldots$	x_{n1}	y_1
x_{12}	x_{22}	$\ldots$	x_{n2}	y_2
x_{13}	x_{23}	$\ldots$	x_{n3}	y_3
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1N}	x_{2N}	$\ldots$	x_{nN}	y_N

som består av en rekke observasjoner av variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, og vi ønsker å bestemme tallene $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ slik at modellen ovenfor passer best mulig med observasjonene. Her er x_{ij} og y_j de ulike observasjonene av variablene x_i og y for $1 \leq j \leq N$. Dersom vi forsøker å bruke disse observasjonene til å finne konstantene β_i for $1 \leq i \leq n$, obstår det lineære likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = \beta_0 & + & \beta_1 x_{11} & + & \beta_2 x_{21} & + \dots + & \beta_n x_{n1} \\ y_2 & = \beta_0 & + & \beta_1 x_{12} & + & \beta_2 x_{22} & + \dots + & \beta_n x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ y_N & = \beta_0 & + & \beta_1 x_{1N} & + & \beta_2 x_{2N} & + \dots + & \beta_n x_{nN} \end{array}$$

som består av N likninger og $n+1$ ukjente. Vi kan skrive likningssystemet på matriseform som $\mathbf{y} = X \cdot \underline{\beta}$, hvor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} \end{pmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Vanligvis er N mye større enn $n+1$, og det lineære likningssystemet har ingen løsning. Dette betyr at det ikke finnes noen $\underline{\beta}$ slik at modellen passer eksakt med observasjonene. Feil-leddet ε_j som måler feilen vi gjør i observasjon j er gitt ved

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \cdots + \beta_n x_{nj} + \varepsilon_j$$

for $1 \leq j \leq N$. Dermed oppstår et nytt lineært system $\mathbf{y} = X \cdot \underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$. Vi ønsker å finne vektoren $\underline{\beta}$ slik at den samlede feilen blir minst mulig.

Metoden vi bruker kalles *minste kvadraters metode*, og baserer seg på at den samlede feilen vi gjør kan beskrives med uttrykket

$$E = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

Dermed ønsker vi å finne $\underline{\beta}$ slik at E blir minst mulig. Vi bruker nå matrisemetoder og kvadratiske former for å løse dette minimumsproblemet. Legg først merke til at E kan skrives på matriserform som

$$E = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} = (\mathbf{y} - X \cdot \underline{\beta})^T \cdot (\mathbf{y} - X \cdot \underline{\beta})$$

Siden $\underline{\beta}^T X^T \mathbf{y}$ er en 1×1-matrise, har vi at $\underline{\beta}^T X^T \mathbf{y} = (\underline{\beta}^T X^T \mathbf{y})^T$. Dermed ser vi at

$$E = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T X \underline{\beta} - \underline{\beta}^T X^T \mathbf{y} + \underline{\beta}^T X^T X \underline{\beta} = \underline{\beta}^T (X^T X) \underline{\beta} - 2\mathbf{y}^T X \underline{\beta} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}$$

Husk at $\mathbf{y}$ og X er gitt. Altså er E en andregradsfunksjon i variablene β, der den kvadratiske formen har symmetrisk matrise $A = X^T X$, der den lineære formen har matrise $B = -2\mathbf{y}^T X$, og der konstantleddet $c = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$. Vi kan dermed minimere feilen E ved hjelp av metodene fra forrige seksjon.

Proposition 2.4. *Anta at* $\det(X^T X) \neq 0$. *Da vil* $\underline{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$ *minimere* E.

Bevis. De stasjonære punktene for E er gitt ved $2A \cdot \underline{\beta} + B^T = \mathbf{0}$, eller

$$2X^T X\underline{\beta} = 2X^T \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad (X^T X)\underline{\beta} = X^T \mathbf{y}$$

Hvis $\det(X^T X) \neq 0$, har vi derfor ett stasjonært punkt $\underline{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$. Ettersom den symmetriske matrisen $A = X^T X$ til den kvadratiske formen er positiv definit, så er det stasjonære punktet minimum for E. Legg merke til at uttrykket

$$\underline{\beta}^T (X^T X)\underline{\beta} = (X\underline{\beta})^T \cdot (X\underline{\beta}) \geq 0$$

siden det er en sum av kvadrater. Dette betyr at $X^T X$ er positiv semidefint. Siden $\det(X^T X) \neq 0$, må $X^T X$ være positiv definit. □

2.5 Anvendelse: Kovariansmatriser

Vi tenker oss $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er stokastiske variable og at vi ønsker på lineære kombinasjoner

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \cdots + a_n X_n$$

av disse stokastiske variablene, der koeffisienter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er tall.

Lemma 2.1. *Vi har at*

1. $E(Y) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \cdots + a_n E(X_n)$
2. $\mathrm{Var}(Y) = a_1^2 \mathrm{Var}(X_1) + a_1 a_2 \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \cdots + a_n^2 \mathrm{Var}(X_n)$

Vi ser at $E(Y)$ er en lineær form i $\mathbf{a}$ og at $\mathrm{Var}(Y)$ er en kvadratisk form i $\mathbf{a}$, gitt ved $E(Y) = \mu \cdot \mathbf{a}$ og $\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{a}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{a}$, når vi definerer *kovariansmatrisen* Σ og *forventningsvektoren* μ ved at

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \ldots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix}, \quad \mu = \big(E(X_1)\ E(X_2)\ \ldots E(X_n)\big)$$

Når vi bruker denne skrivemåte, oppfatter vi koeffiisentene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ som en vektor $\mathbf{a}$. Legg merke til at matrisen Σ er en symmetrisk matrise, og den er også alltid positive semidefinit siden $\mathrm{Var}(Y) \geq 0$ for alle $\mathbf{a}$.