

Emne

- 1 Om eksamen
- 2 Gjennomgang av Eksamen 05/2024

Husk kursevaluering.

Formlark: Son på eksamen 05/2024

① Om eksamen

15 punkter med lik vekt

6 lin. algebra

4 kont. stok. var

5 diff. likn +

var. regning /
optimal kontroll.

② Eksamen 05/2024

1. a) $x_1 u_1 + \dots + x_5 u_5 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & -2 & -5 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & -9 & 2 \\ -2 & 4 & 8 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 15 & 1 & 4 & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2 \\ 3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & -2 & -5 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & \textcircled{3} & 0 & -6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & 4 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 & \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_5 \text{ fri} \\ \Downarrow \\ x_5 = t \end{array}$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 3t$$

$$3x_2 - 6x_4 = 9t$$

$$-2x_3 + 4x_4 = 4t$$

$$x_4 = 5t$$

$$x_1 = 3t + 2(13t) + 5(8t) = 69t \quad \underline{x_1 = 69t}$$

$$3x_2 = 9t + 6(5t) = 39t \quad \underline{x_2 = 13t}$$

$$-2x_3 = 4t - 4(5t) = -16t \quad \underline{x_3 = 8t}$$

$$\underline{x_4 = 5t}$$

Konklusjon: Løsningen er $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (69t, 13t, 8t, 5t, t)$

med parameter t .

Formelsamling

Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B \mathbf{x} + c$$

hvor A er en symmetrisk matrise har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dt = uv - \int uv' \, dt$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \, dt = \int f(u) \, du$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, u) \, dt$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + pG(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)

eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)

med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$

Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, y') \, dt$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$
har Euler-likning

$$F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{y'}) = 0$$

EKSAMENSRESULTATER

ELE3719 Matematikk valgfag, 2024

Runar Ile, Institutt for samfunnsøkonomi

Statistikk

Antall eksamensbesvarelser	113
Karakter A-B	31%
Karakter F	19%
Gjennomsnittsskår	58%

Kommentarer

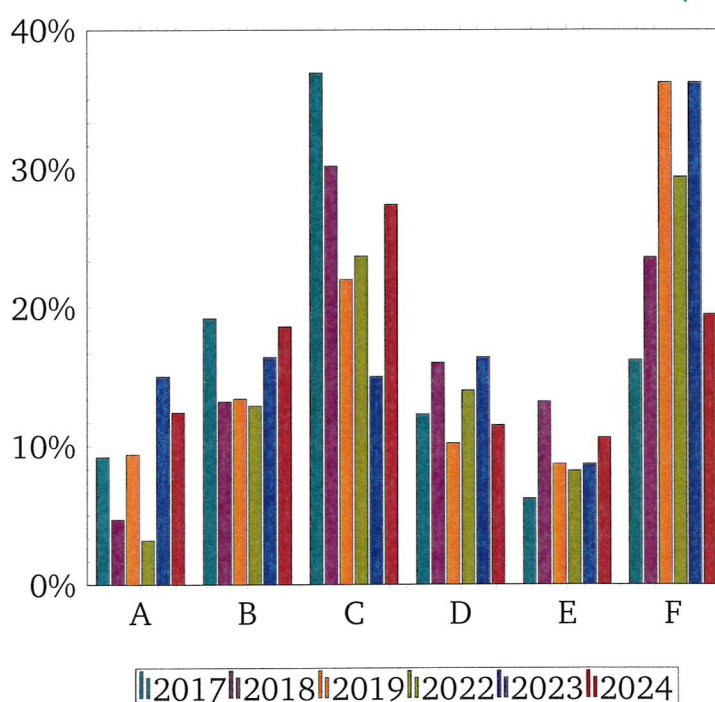
Andelene som fikk A eller B er høy (som i fjor), gjennomsnittsskår er relativt høy og det var relativt få på F. Det er uvanlig høy skår på 5b (optimal kontrollteori) og 5c (variasjonsregning) – disse oppgavene var ikke så regnekrevende som de pleier å være (selv om 5a ikke kunne brukes direkte). Oppgave 3d (forventningsverdi av $X + Y$) skåret lavt og 2d (skrå ellipse) skåret lavest – en ny oppdagetype. Det siste punktet i oppgave 1b (felles vektor i to spenn) ble løst korrekt av to studenter. De fleste oppgavene krever klar kjennskap til sentrale definisjoner i kurset. Mange av besvarelsene som strøk bar preg av dårlige regneferdigheter (særlig integrering).

Gjennomsnittsskår per delproblem (%)

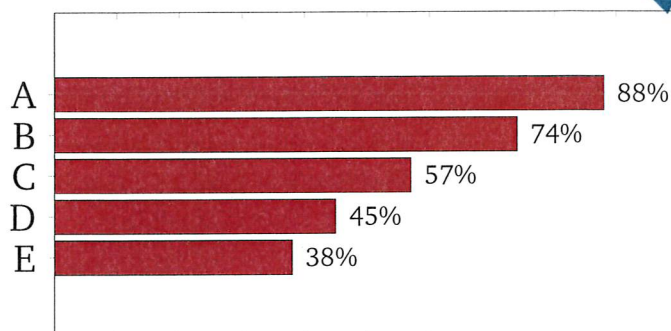
Oppg 1	63 – 52
Oppg 2	76 – 68 – 66 – 11
Oppg 3	53 – 60 – 60 – 34
Oppg 4	57 – 69
Oppg 5	73 – 66 – 67

Det er laget et detaljert løsningsforslag.

Karakterfordeling



Karakterskala 2024



$$\underline{t=1}: 69\underline{u_1} + 13\underline{u_2} + 8\underline{u_3} + 5\underline{u_4} + \underline{u_5} = \underline{0}$$

$$\underline{u_1} = \frac{1}{69}(-13\underline{u_2} + 8\underline{u_3} - 5\underline{u_4} - \underline{u_5})$$

$$\underline{u_1} = \underline{\underline{\frac{-13}{69}\underline{u_2} - \frac{8}{69}\underline{u_3} - \frac{5}{69}\underline{u_4} - \frac{1}{69}\underline{u_5}}}} \quad \text{Ja.}$$

b) $\{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \underline{u_4}\}$ basis for $\text{span}(\underline{u_1}, \dots, \underline{u_5})$
fordi vi har pivot-pos. i kolonne 1-4.

$$(\underline{u_1} | \underline{u_3} | \underline{u_5}) \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -5 & 3 \\ 0 & \textcircled{-2} & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{-9} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5/4}$$

$$\{\underline{u_1}, \underline{u_3}, \underline{u_5}\} \text{ er lin. uavhengige} \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -5 & 3 \\ 0 & \textcircled{-2} & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{-9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden vi har pivotpos. i alle kolonner

$$\underline{v} = \underline{c_1\underline{u_1} + c_2\underline{u_3} + c_3\underline{u_5}} = \underline{d_1\underline{u_2} + d_2\underline{u_4}}$$

$$\Rightarrow c_1\underline{u_1} - d_1\underline{u_2} + c_2\underline{u_3} - d_2\underline{u_4} + c_3\underline{u_5} = \underline{0}$$

$$\text{ille-trinnell lesn: } 69\underline{u_1} + 13\underline{u_2} + 8\underline{u_3} + 5\underline{u_4} + \underline{u_5} = 0 \quad \text{for (a).}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = 69\underline{u_1} + 8\underline{u_3} + \underline{u_5} = -13\underline{u_2} - 5\underline{u_4} \neq \underline{0}$$

ligger i $\text{span}(\underline{u_1}, \underline{u_3}, \underline{u_5})$ og $\text{span}(\underline{u_2}, \underline{u_4})$

Konklusjon: Ja

2.a) Eigenverdier:

$$\begin{vmatrix} 52-\lambda & -36 & 0 \\ -36 & 73-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$+ (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 52-\lambda & -36 \\ -36 & 73-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) (\lambda^2 - 125\lambda + 2500) = 0$$

$\lambda = -1$ eller $\lambda = \frac{125 \pm \sqrt{125^2 - 4 \cdot 2500}}{2}$
 $\lambda = 25$ eller $\lambda = 100$

Eigenvektorer:

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 53 & -36 & 0 \\ -36 & 74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{36}{53}} \begin{pmatrix} 53 & -36 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ fri} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad * \neq 0 \quad \text{er egenvektorene ved } \lambda = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 25 \\ \lambda = 100 \end{array} \right\} \text{ tilsvarende}$$

$$\lambda = 25: t \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t/3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 100: t \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t/4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Siden A er symmetrisk så finnes ortogonal diag.

$$P^T A P = D \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Finner P ved
å normalisere
de tre basis-
vektorene for

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, \lambda = 25, \lambda = 100:$$

$$\lambda = 1: \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\underline{u}_1\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\lambda = 100: \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\underline{u}_3\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

$$\lambda = 25: \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\underline{u}_2\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$$

same matrise
som i A)

$$c) f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B \underline{x} + 2024$$

$$A = \begin{pmatrix} 52 & -36 & 0 \\ -36 & 73 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stasjon. pkt: $2A\underline{x} + B^T = \underline{0}$

$$B = (-1200 \quad 350 \quad 48)$$

$$2A\underline{x} = -B^T$$

$$A\underline{x} = -\frac{1}{2}B^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1200 \\ 350 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -175 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 52 & -36 & 0 & 600 \\ -36 & 73 & 0 & -175 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \end{array} \right) \rightarrow \text{Gauss} \dots \rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{Stasjon. pkt.}$$

$$d) \quad 52x_1^2 + 73x_2^2 - 72x_1x_2 = 2500$$

$$\underline{x}^T \cdot \underset{\substack{\text{"} \\ E}}{\begin{pmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{pmatrix}} \underline{x} = 2500$$

Fra (b) finner vi ortogonal diagonalisering av E :

Eigenverdier for E : $\lambda = 25, \lambda = 100$

Ortogonal basis: $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$$P^T E P = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad P = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^T E \underline{x} = 2500$$

$$\text{Setter: } \underline{x} = P \underline{y} \rightarrow P^T \underline{x} = \underline{y}$$

$$\underline{y}^T P^T E P \underline{y} = \underline{y}^T \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \underline{y} = 25y_1^2 + 100y_2^2 = 2500$$

Nye koordinater:

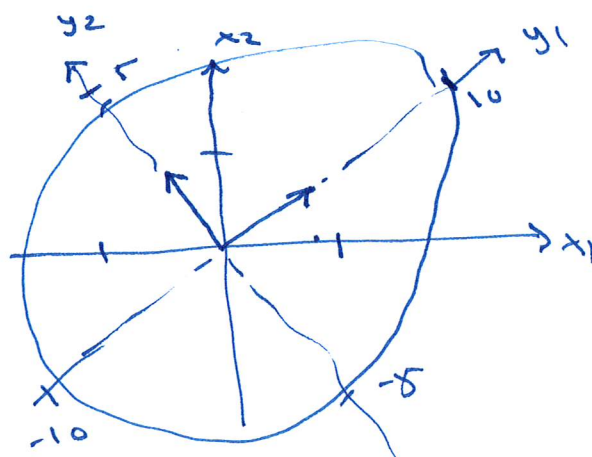
$$\underline{y} = P^T \underline{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

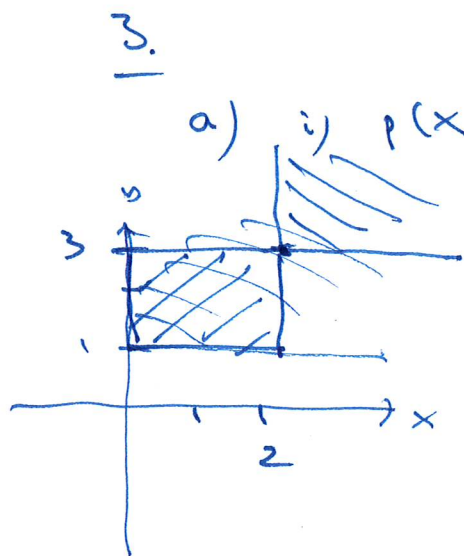
$$y_1 = \frac{1}{5} (4x_1 + 3x_2)$$

$$y_2 = \frac{1}{5} (-3x_1 + 4x_2)$$

$$\underline{x} = P \underline{y} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ellipse: } \frac{y_1^2}{100} + \frac{y_2^2}{25} = 1$$





a) i) $P(X \leq 2, Y \leq 3) = \int_0^2 \int_1^3 \frac{e^{-0.5x}}{y^3} dy dx$

$$= \int_0^2 e^{-0.5x} \left[-\frac{1}{2} y^{-2} \right]_1^3 dx$$

$$= \int_0^2 e^{-0.5x} \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \frac{8}{18} \left[-2e^{-0.5x} \right]_0^2 = -\frac{16}{18} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{9} (1 - 1/e)}}$$

ii) $P(X \geq 2, Y \geq 3) = \int_2^\infty \int_3^\infty \frac{e^{-0.5x}}{y^3} dy dx =$

-- se løsningsforslag

$$\begin{aligned} y^{-2} \Big|_{y=\infty} &= 0 \\ e^{-0.5x} \Big|_{x=\infty} &= 0 \end{aligned}$$

b) $f_X(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-0.5x}}{y^3} dy = e^{-0.5x} \left[-\frac{1}{2} y^{-2} \right]_1^\infty$

$$= e^{-0.5x} \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{-0.5x}}} \quad (x \geq 0)$$

Første levertid: a

$$\int_0^a f_X(x) dx = 1/4$$

$$\int_0^a \frac{1}{2} e^{-0.5x} dx = \frac{1}{2} \left[-2 e^{-0.5x} \right]_0^a$$

$$= -1 \cdot (e^{-0.5a} - 1) = 1 - e^{-0.5a} = 1/4$$

$$e^{-0.5a} = 3/4$$

$$-0.5a = \ln(3/4)$$

$$a = \underline{\underline{-2 \ln(3/4) = \ln((3/4)^{-2})}}$$

$$= \ln(16/9)$$

c) X og Y uavh $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$\frac{e^{-0.5x}}{y^3} = \frac{1}{2} e^{-0.5x} \cdot \frac{2}{y^3} \quad (\text{ok})$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-0.5x}}{y^3} dx$$

Ja, de er uavhengige

$$= \frac{1}{y^3} \left[-2 e^{-0.5x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{y^3} (0 + 2) = 2/y^3$$

d) $Z = X + Y$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-0.5x} dx = \left[-x e^{-0.5x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-0.5x} dx$$

$$\frac{x}{e^{0.5x}} \rightarrow 0$$

når $x \rightarrow \infty$

$$\left[\begin{array}{l} u = -e^{-0.5x} \quad v = x \\ u' = \frac{1}{2} e^{-0.5x} \quad v' = 1 \end{array} \right] = (0 - 0) + \left[-2 e^{-0.5x} \right]_0^{\infty}$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

$$E(y) = \int_1^{\infty} y \cdot \frac{2}{y^3} dy = \int_1^{\infty} \frac{2}{y^2} dy = 2 \left[-1 \cdot y^{-1} \right]_1^{\infty}$$

$-\frac{1}{y}$

$$= 2(0 + 1) = 2$$

4. a) $y' + y = 2te^{-t} + 2024 \quad | \cdot e^t$

$$(y \cdot e^t)' = 2t + 2024e^t \quad | \int \dots dt$$

første orden
linear

$\Downarrow$
int. faktor

$$ye^t = \int (2t + 2024e^t) dt$$

$$a(t) = 1$$

$$\int a(t) dt = t + C$$

$$\frac{ye^t}{e^t} = \frac{t^2 + 2024e^t + C}{e^t}$$

$$\underline{u = e^t} \quad \text{int. faktor}$$

$$y = \frac{t^2}{e^t} + 2024 + \frac{C}{e^t} = \underline{\underline{\frac{t^2 + C}{e^t} + 2024}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \underline{\underline{2024}}$$

b) $e^y \cdot y' = e^t$

første orden
separabel

$$y' = e^t \cdot e^{-y} \quad | : e^{-y} = \cdot e^y$$

$y' dt = dy$

$$e^y \cdot y' = e^t \quad | \int \dots dt$$

$$\int e^y dy = \int e^y y' dt = \int e^t dt$$

$$e^y = e^t + C$$

$$y = \underline{\underline{\ln(e^t + C)}}$$

5. a) $9y'' = y$, $y(0) = 2$
 $y'(0) = 0$

andre ordens
linear
homogen

$$9y'' - y = 0 \quad | :9$$

$$y'' - \frac{1}{9}y = 0 \quad r^2 - \frac{1}{9} = 0$$

$$r^2 = \frac{1}{9} \quad r = \pm \frac{1}{3}$$

$$y = c_1 \cdot e^{t/3} + c_2 \cdot e^{-t/3} \quad \text{generell løsn.}$$

$$y' = \frac{c_1}{3} \cdot e^{t/3} - \frac{c_2}{3} \cdot e^{-t/3}$$

$$y(0) = 2 : \quad c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 + c_2 = 2 \quad c_1 = c_2 = 1$$

$$y'(0) = 0 \quad \frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$c_1 - c_2 = 0 \quad c_1 = c_2$$

Part. løsn: $y = e^{t/3} + e^{-t/3}$

b) maks $\int_0^1 15 - 9y^2 - u^2 dt$ når

$y' = u$
 $y(0) = 2$
 $y'(0) = 0$

$$H = 15 - 9y^2 - u^2 + p \cdot u$$

Maximumsprinsipp, normal løsn:

$$H'_u = 0$$

$$H'_u = 0$$

$$-2u + p = 0$$

$$-2u + p = 0$$

$$p' = -H'_y$$

$$H'_y = -p'$$

$$-18y = -p'$$

$$p' = 18y$$

$$-2y' + p = 0$$

$$p = 2y' \Rightarrow p' = 2y''$$

$$p' = 18y$$

$$\Rightarrow 2y'' = 18y$$

$$y'' = 9y$$

$$y' = u$$

Løser: $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 2$
 $y'(0) = 0$

$$r^2 - 9 = 0$$

$$r = \pm 3$$

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$$

$$y' = 3C_1 e^{3t} - 3C_2 e^{-3t}$$

$$y(0) = 2: C_1 + C_2 = 2$$

$$y'(0) = 0: 3C_1 - 3C_2 = 0 \quad | :3 \rightarrow C_1 - C_2 = 0 \quad \underline{C_1 = C_2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{e^{3t} + e^{-3t}}}$$

$$u = y' = \underline{\underline{3e^{3t} - 3e^{-3t}}}$$

$$\underline{\underline{C_1 = C_2 = 1}}$$

Spekter at løsn.
 overfor gir max:

$$H = 15 - 9y^2 - u^2 + pu$$

$$\begin{aligned} H'_y &= -18y & \left(\begin{array}{cc} H''_{yy} = -18 & H''_{yu} = 0 \\ H''_{uy} = 0 & H''_{uu} = -2 \end{array} \right) \\ H'_u &= -2u + p \end{aligned}$$

$$H(H) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -18 \\ \lambda = -2 \end{array}$$

Konklusjon:

$$y = e^{3t} + e^{-3t}$$

$$u = 3e^{3t} - 3e^{-3t}$$

$$\underline{\underline{\hspace{2cm}}}$$

gir max i

kontrollproblemet

siden det er

normalt løst ut/ Pontryagin's maks-prinsipp

$\Rightarrow H$ er konvek i (y, u) .

neg. egenverdier

$\Rightarrow$ neg. def.

$\Rightarrow H$ konvek i (y, u)

$$c) \text{ maks } \int_0^1 15 - 9y^2 - u^2 dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y' = u \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$= \text{maks } \int_0^1 15 - 9y^2 - (y')^2 dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Euler ligr:

$$F_y' - \frac{d}{dt}(F_{y'}) = 0$$

$$F = 15 - 9y^2 - (y')^2$$

$$F_y' = -18y$$

$$F_{y'}' = -2y'$$

$$\frac{d}{dt}(-2y') = -2y''$$

Euler:

$$-18y - (-2y'') = 0$$

$$2y'' - 18y = 0$$

$$y'' - 9y = 0$$

Løsning:

av Euler

$$y = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}$$

(følger fra regn. i b)

Spører om
dette gir
maks:

$$\begin{pmatrix} F_{yy}'' = -18 & F_{yy'}'' = 0 \\ F_{y'y}'' = 0 & F_{y'y'}'' = -2 \end{pmatrix}$$

$$H(F) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -18 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

neg.
eigenverdier

$\Rightarrow$ neg. definit

$\Rightarrow F$ konvex i (y, y')

Kontroll: $y = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}$

gir maks i var. problem

siden y løser Euler + nit. betingelser

og F konvex i (y, y') .