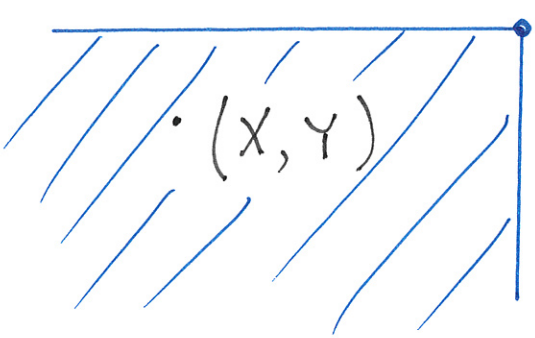
ELE 3719, 10. forelesning, 21. okt. 2025, Runar Ile

1. Repetisjon
2. Uavhengige stokastiske variabler (6)
3. Betinget sannsynlighetsfordeling (7)
4. Kovariansmatrisen (8)

1. Repetisjon

Kumulativ fordelingsfunksjonen

$$F(a,b) = P(X \le a, Y \le b) = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,dx\,dy$$



Omvendt, anta $F(x,y)$ er kjent. Da kan vi finne tetthetsfunksjonen $f(x,y)$ ved å derivere to ganger:

$$F''_{yx} = (F'_y)'_x = f(x,y) = (F'_x)'_y = F''_{xy}$$

Marginalene - tetthetsfunksjonene til X og Y

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{og} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

„integrerer bort y" „integrerer bort x"

Eks (Eksamen 2019v, oppg 2b) For oppgitt kum. fordeling:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-0,2x} - e^{-0,3y} + e^{-0,2x-0,3y} & \text{for } x,y \ge 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finner $f(x,y)$ ved å derivere to ganger.

$$F_y' = 0 - 0 + 0{,}3e^{-0{,}3y} - 0{,}3e^{-0{,}2x-0{,}3y}$$

$$= \begin{cases} 0{,}3e^{-0{,}3y} - 0{,}3e^{-0{,}2x-0{,}3y}, & x, y \geq 0. \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f(x,y) = (F_y')_x' = 0 - 0{,}3 \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2x-0{,}3y}$$

$$= \begin{cases} 0{,}06\, e^{-0{,}2x-0{,}3y} & \text{for } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Marginalene

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} 0{,}06\, e^{-0{,}2x-0{,}3y}\,dy$$

Bruker at $e^{-0{,}2x-0{,}3y} = e^{-0{,}2x} \cdot e^{-0{,}3y}$

$$= 0{,}06\, e^{-0{,}2x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-0{,}3y}\,dy$$

$$= -\frac{0{,}06}{0{,}3} \cdot e^{-0{,}2x} \cdot \left[e^{-0{,}3y}\right]_{y=0}^{y=\infty}$$

($-0{,}2$ over $-0{,}3$)

$$= -0{,}2\, e^{-0{,}2x} \cdot [0 - e^0]$$

($e^0 = 1$)

$$= \begin{cases} 0{,}2\, e^{-0{,}2x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi kan gjøre det samme for å finne $f_Y(y)$.

Alternativ Siden F'_y er kjent, har vi også

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \Big[F'_y(x,y) \Big]_{x=-\infty}^{x=\infty}$$

$f(x,y)$: $(F'_y)'_x$ — $F'_y(x,y)$: en anti-derivert m.h.p. x til $f(x,y)$

$$= \Big[\underbrace{0{,}3e^{-0{,}3y}}_{\text{legges til og trekkes fra}} - 0{,}3e^{-0{,}2x-0{,}3y} \Big]_{x=0}^{x=\infty}$$

$$= \begin{cases} 0{,}3e^{-0{,}3y} & \text{for } y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

---

2. Uavhengige stok. variabler

Definisjon To simultant fordelte stok. var. X og Y er uavhengige hvis

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Eks (forts) $f(x,y) = \begin{cases} 0{,}06\,e^{-0{,}2x-0{,}3y} & \text{for } x,y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

og $f_X(x) = \begin{cases} 0{,}2\,e^{-0{,}2x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}3\,e^{-0{,}3y} & \text{for } y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Da er

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot e^{-0{,}2x}\cdot e^{-0{,}3y} & \text{for } x,y\geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0{,}06\ e^{-0{,}2x-0{,}3y} & \text{for } x,y\geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$= f(x,y).$$ Altså er X og Y uavhengige.

Anta X og Y er uavhengige. Da er

$$E(X\cdot Y) \overset{\text{magisk}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

$h(x,y)=xy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot y\cdot f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dx\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx\right)}_{E(X)}\cdot y\cdot f_Y(y)\,dy$$

$$= E(X)\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy}_{E(Y)} = E(X)\cdot E(Y)$$

Start: 15.02

Det betyr at

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\text{alltid}}{=} E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$\overset{X \text{ og } Y \text{ uavh.}}{=} E(X)\cdot E(Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0$$

NB1 Selv om $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ er det ikke sikkert at X og Y er uavhengige.

{ X og Y kalles da "lineært ukorrelerte"

NB2 Hvis X og Y er avhengige kan vi ikke finne $f(x,y)$ fra $f_X(x)$ og $f_Y(y)$.

---

3. Betinget sannsynlighet

Eks Kaster to terninger

X = summen

$Y = \begin{cases} 1 & \text{hvis to like} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Mulig spørsmål: Hva er sannsynlighet for at $X=6$ gitt at $Y=0$?

$$P(X=6 \mid Y=0) = \frac{\text{ant. gunstige}}{\text{ant. mulige}} = \frac{4}{30}$$

"gitt at" ↑

som også er

$$\frac{P(X=6 \text{ og } Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{\left(\frac{4}{36}\right)}{\left(\frac{30}{36}\right)} = \frac{4}{30}$$

Eks Vi trekker en laks opp av en mær.

X = vekten , Y = omkretsen

Mulig spørsmål: Hva er sannsynligheten for at vekten er mellom 3 og 4 kg gitt at omkretsen er 40 cm.

$$P(3 \le X \le 4 \mid Y = 40)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{P(3 \le X \le 4 \text{ og } 40 \le Y \le 40+h)}{P(40 \le Y \le 40+h)}$$

$$= \int_3^4 \left[\lim_{h \to 0} \frac{\int_{y=40}^{y=40+h} f(x,y)\, dy}{\int_{y=40}^{y=40+h} f_Y(y)\, dy} \right] dx$$

l'Hôpitals regel

$$= \int_3^4 \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x, 40+h)}{f_Y(40+h)} \right] dx$$

$$= \int_3^4 \frac{f(x, 40)}{f_Y(40)}\, dx$$

denne brøken er tetthetene til en ny stokastisk variabel

$$X \mid Y = 40$$

Definisjon Anta $f_Y(b) \neq 0$ og $f_X(a) \neq 0$

Setter $f_{X|Y=b}(x) = \dfrac{f(x,b)}{f_Y(b)}$ og

$$f_{Y|X=a}(y) = \frac{f(a,y)}{f_X(a)}$$

Dette er tetthetsfunksjoner til stok. var.

$X|Y=b$ og $Y|X=a$

– betinget sannsynlighet.

Eks $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{for } 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Da er $f_{X|Y=\frac{7}{10}}(x) = \dfrac{f(x,\frac{7}{10})}{f_Y(\frac{7}{10})} = \dfrac{x+\frac{7}{10}}{\frac{1}{2}+\frac{7}{10}} = \begin{cases} \frac{5}{6}x+\frac{7}{12} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Vi finner $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}+y & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Med tetthetene kan vi regne ut (f.eks.) forventningen til $X|Y=\frac{7}{10}$:

$$E\left(X|Y=\tfrac{7}{10}\right) = \int_0^1 x\cdot\left(\tfrac{5}{6}x+\tfrac{7}{12}\right)dx = \left[\tfrac{5}{18}x^3+\tfrac{7}{24}x^2\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{5}{18}+\frac{7}{24}-0 = \frac{41}{72} \approx \underline{0{,}57}$$

Start: 16.01

NB Hvis X og Y er uavhengige, dvs

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(x)$, så er

$$f_{X|Y=b}(x) = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(b)}{f_Y(b)} = f_X(x)$$

"uavhengig av hva Y er"

og tilsvarende er $f_{Y|X=a} \overset{\text{samme regning}}{=} f_Y(y)$

"uavhengig av hva X er"

---

4. Kovariansmatrisen

$$C = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix}$$

Anta $Z = aX + bY$ for to tall a og b.

Da $E(Z) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$ — oppg. (bruk $h(x,y) = ax + by$ osv.)

Men hva er $\text{Var}(Z)$? Kan bruke C.

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= E((aX+bY)^2) - (a \cdot E(X) + b \cdot E(Y))^2$$

$$= E(a^2X^2 + 2ab\,X \cdot Y + b^2Y^2) - (a^2E(X)^2 + 2ab\,E(X)E(Y) + b^2E(Y)^2)$$

$$= a^2 \cdot E(X^2) + 2ab\,E(X \cdot Y) + b^2E(Y^2)$$

$$- a^2E(X)^2 - 2ab\,E(X) \cdot E(Y) - b^2E(Y)^2$$

$$= a^2\underbrace{(E(X^2) - E(X)^2)}_{\text{Var}(X)} + 2ab\underbrace{(E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y))}_{\text{Cov}(X,Y)} + b^2\underbrace{(E(Y^2) - E(Y)^2)}_{\text{Var}(Y)}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

matrise-multiplikasjon

Resultat Kovariansmatrisen er positiv semi-definitt

Begrunnelse Resultat 1.12a sier at $\mathrm{Var}(Z) \geq 0$ uansett hva a og b er, dvs at den kvadratiske formen (funksjonen i a og b) er pos. semi-definitt, og da er også matrisen det.

Anvendelse Vi har n verdipapirer $S_1, \ldots, S_n$ og stok. var. $X_1, \ldots, X_n$ der X_i gir forventet avkastning på S_i.

Q: Hvordan skal vi investere en gitt sum i disse verdipapirene slik at vi får en gitt avkastning r med minimal risiko?

Svar Finner vekter (tall) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ og

setter $Z = v_1 X_1 + v_2 X_2 + \ldots + v_n X_n$

slik at $E(Z) = r$ og $\mathrm{Var}(Z)$ er minimal.

Dette er et Lagrangeproblem med to bibetingelser

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1 \\ E(Z) = v_1 E(X_1) + v_2 E(X_2) + \ldots + v_n E(X_n) = r \end{cases}$$

(her er $v_1, v_2, \ldots, v_n$ variablene)

og Lagrangefunksjonen er

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = [v_1 \; v_2 \ldots v_n] \, C \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$- \lambda_1 (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$$

$$- \lambda_2 \cdot E(Z)$$

dette er en andregrads-funksjon i v_i-ene!

Vil finne minimum til denne.

– kan bruke teorien for andregradsfunksjoner – se lin.algebra-delen

– flere detaljer og et konkret regneeks. i heftet, kap. 8.