ELE 9719, 12. forelesning, 31. okt. 2025, Runar Ile

1. Repetisjon
2. Lineære første ordens differensiallikninger
3. konstante koeffisienter
4. Ikke-konstante koeffisienter

1. Repetisjon

* Den ukjente er en funksjon $y = y(t)$
* Likningen inneholder y, $y' = y'(t)$, y'' (kanskje),... og t.
* Den generelle løsningen inneholder ubestemte konstanter. De kan bestemmes hvis vi har ekstra betingelser (initial betingelser)
* separable diff. likninger kan skrives på formen

$$y' = f(y) \cdot g(t) \qquad | : f(y)$$

$$\int \frac{y'}{f(y)}\, dt = \int g(t)\, dt$$

Substituerer $y = y(t)$ som en ny variabel

Da $dy = y'\, dt$

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int g(t)\, dt$$

uttrykk i y (ingen t-er) — uttrykk i t (ingen y-er)

Løser denne likningen for y.
(dvs y på VS, uttrykk i t på HS).

Eks Arbeidsboken oppg. 11.7.2

$$(1+t^3)y' = t^2 \cdot y \quad \text{med } (t_0, y_0) = (0,2)$$

dvs $y(0) = 2$

Separabel: $y' = \overbrace{y}^{f(y)} \cdot \underbrace{\frac{t^2}{1+t^3}}_{g(t)}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{t^2}{1+t^3}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy \overset{y=y(t)}{=} \int \frac{y'}{y}\,dt = \int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$$

Integrasjon ved substitusjon:

$u = 1+t^3$

$du = 3t^2 \cdot dt \quad | : 3t^2$

$dt = \frac{1}{3t^2} \cdot du$

så $\ln|y| + C_0 = \int \frac{t^2}{u} \cdot \frac{1}{3t^2}\,du$

$$\ln|y| + C_0 = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$\underbrace{\ln|y| + C_0}_{\text{uttrykk i } y} = \frac{1}{3}\ln|u| + C_1 = \underbrace{\frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C_1}_{\text{uttrykk i } t}$$

Løser likningen for y:

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C_2 \quad (C_2 = C_1 - C_0)$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C_2}$$

$$|y| = e^{C_2} \cdot \left(e^{\ln|1+t^3|}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$|y| = e^{C_2} \cdot |1+t^3|^{\frac{1}{3}}$$

$$y(t) = \underbrace{\pm e^{C_2}}_{=K}\sqrt[3]{1+t^3}$$

(*) $$\underline{\underline{y(t) = K\cdot\sqrt[3]{1+t^3}}}$$ for en ukjent konst. K.

Bruker $y(0)=2$ for å bestemme K.

Fra (*): $2 = K\cdot\sqrt[3]{1+0^3}$ dvs $\underline{K=2}$

og $$\underline{\underline{y(t) = 2\cdot\sqrt[3]{1+t^3}}}$$

---

2. Lineære første ordens differensialligninger

– kan skrives på formen $y'(t) + a(t)\cdot y(t) = b(t)$

Eks $y' + 2y = 0$

* lineær fordi bare y, y', y'' osv (ikke $y\cdot y'$, y^2 osv.)
* første orden: bare y og y' (ikke y'', y''', osv)
* konstante koeffisienter: $a(t)=2$ og $b(t)=0$ – konstante funksjoner
* homogen: $b(t)=0$
* separabel (!): $y' = \underbrace{-2}_{g(t)}\cdot\underbrace{y}_{f(y)}$ så $\frac{y'}{y} = -2$ osv.

3. Konstante koeffisienter

Det homogene tilfellet : $y' + a \cdot y = 0$

- er separabel : $y' = -a \cdot y$ (a et fast tall)

Så $\frac{y'}{y} = -a$

Da er $\ln|y| = \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{y'}{y}\,dt = \int -a\,dt$

$\ln|y| = -at + C_1$

Så $|y| = e^{-at+C_1} = e^{-at} \cdot e^{C_1}$

dvs $y(t) = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C} \cdot e^{-at} = \underline{\underline{C \cdot e^{-at}}}$

Idé I en lineær diff. likn. er den generell løsningen gitt som $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$y_h(t)$: den generelle løsningen på den homogene diff.likningen (erstatter ttl m. 0)

$y_p(t)$: en "partikulær" ("spesiell") løsning på diff. likn., dvs uten ubestemt konstant

At dette er riktig kalles superposisjonsprinsippet

Start: 12.00

Eks $y' - 2y = 6$

Har $y_h(t) = \underline{C \cdot e^{2t}}$

- er den generelle løsningen på den homogene likningen:

$$y' - 2y = 0$$

"Gjetter" at $y_p(t) = A$ (en konstantfunksjon)

Da er $y_p'(t) = 0$

så diff. likn. blir

$$0 - 2A = 6$$

så $A = \frac{6}{-2} = \underline{-3}$ og

$$y(t) = \underline{\underline{C \cdot e^{2t} - 3}}$$

er da den generelle løsningen på diff. likn. ved superposisjons-prinsippet.

samme type

← denne diff. likn. er også separabel:

$$y' = 2y + 6$$

$$= \underbrace{(y+3)}_{f(y)} \cdot \underbrace{2}_{g(t)}$$

$$\frac{y'}{y+3} = 2$$

$$\ln|y+3| = 2t + C_1$$

$$|y+3| = e^{2t+C_1}$$

$$y+3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{2t} \quad (\pm e^{C_1} = C)$$

$$\underline{\underline{y(t) = C \cdot e^{2t} - 3}}$$

Generelt: $y' + a \cdot y = b$ (a, b er konst.)
gir $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$

4. Ikke-konstante koeffisienter

$$y' + a(t) \cdot y = b(t)$$

Ved superposisjonsprinsippet er $y = y_h + y_p$

og

$$(*) \quad \boxed{y_h(t) = C \cdot e^{-\int a(t)\,dt}}$$

C er en ubestemt konstant

Begrunnelse: $y_h'(t) = -a(t) \cdot C \cdot e^{-\int a(t)\,dt}$

Kjerneregelen med

$u(t) = -\int a(t)\,dt$ og $g(u) = Ce^u$

$u'(t) = -\left[\int a(t)\,dt\right]'$ $\quad g'(u) = Ce^u$

$= -a(t)$

Så VS av den homogene diff.likn. $y' + a(t)y = 0$

er $-a(t) \cdot C \cdot e^{-\int a(t)\,dt} + a(t) \cdot C \cdot e^{-\int a(t)\,dt}$

som er 0

HS: 0 – så ok

Men det kan være vanskelig å finne en $y_p(t)$.

Eks $\overbrace{y' + (2t+3)\cdot y}^{a(t)} = 0$ (homogen!)

Da er $y(t) = y_h(t) \overset{(*)}{=} \underline{\underline{C \cdot e^{-(t^2+3t)}}}$

Alternativ metode (integrerende faktor)

Eks $y' + 2t \cdot y = e^{t-t^2}$ $\begin{cases} a(t) = 2t \\ b(t) = e^{t-t^2} \end{cases}$

Multipliserer BS med en ny, ukjent funksjon $u = u(t)$.

$$u \cdot y' + 2t \cdot u \cdot y \overset{(*)}{=} u \cdot e^{t-t^2}$$

Vil finne $u(t)$ slik VS er resultatet av å bruke produktregelen:

$$(u \cdot y)'_t = u \cdot y' + u' \cdot y$$

Altså må $u' = 2t \cdot u$ – en separabel diff. likn.

dvs $\dfrac{u'}{u} = 2t$

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int 2t\, dt$$

dvs $\ln|u| = t^2 + C_1$

så $u(t) = \pm e^{t^2+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{t^2}$

$u(t) = C \cdot e^{t^2}$ og velger $C = 1$

så $\underline{u(t) = e^{t^2}}$

VS $\overset{(*)}{=}$ HS

Får $(u \cdot y)'_t = e^{t^2} \cdot e^{t-t^2} = e^{t^2+t-t^2} = e^t$

dvs $u \cdot y = \int e^t \, dt$

$u \cdot y = e^t + C_2 \quad | : u = e^{t^2}$

$$y(t) = \frac{e^t + C_2}{e^{t^2}}$$

$$y(t) = \frac{e^t}{e^{t^2}} + \frac{C_2}{e^{t^2}} = \underline{\underline{e^{t-t^2} + C_2 \cdot e^{-t^2}}}$$

Start: 13.00

Eks Løs diff. likningen ved å bruke integrerende faktor.

$$y' - 4t\,y = 3t$$

$\begin{cases} a(t) = -4t \\ b(t) = 3t \end{cases}$

Løsning Må multiplisere BS med en ukjent funksjon $u = u(t)$.

$$\underline{uy' - 4tuy} = 3tu$$

$$(uy)' = u \cdot y' + u' \cdot y$$

Får diff. likn. for u: $u' = -4tu \quad | : u$

$$\frac{u'}{u} = -4t$$

Setter $u = u(t)$, $du = u' \cdot dt$ } Får $\ln|u| = \int -4t\,dt = -2t^2 + C_1$

$$|u| = e^{-2t^2+C_1} = e^{-2t^2} \cdot e^{C_1}$$

dvs $u = C \cdot e^{-2t^2}$ og setter $C = 1$.

$$\underline{u(t) = e^{-2t^2}}$$

Derfor er $(e^{-2t^2} \cdot y)' = 3t \cdot e^{-2t^2}$

Integrerer BS: $e^{-2t^2} \cdot y = \int 3t \cdot e^{-2t^2} \, dt$

Integrerer HS ved substitusjon:

$v = v(t) = -2t^2$

$dv = v'(t)\,dt = -4t\,dt$

dvs $dt = \frac{1}{-4t}\,dv$

$$= \int 3t \cdot e^{v} \cdot \frac{1}{-4t} \cdot dv$$

$$= -\frac{3}{4} \int e^{v} \, dv$$

$$= -\frac{3}{4} e^{v} + C_2$$

$$= -\frac{3}{4} e^{-2t^2} + C_2$$

Så $y(t) = \dfrac{-\frac{3}{4} e^{-2t^2} + C_2}{e^{-2t^2}}$

$$= \frac{-\frac{3}{4} e^{-2t^2}}{e^{-2t^2}} + \frac{C_2}{e^{-2t^2}}$$

$$= -\frac{3}{4} + C_2 \cdot e^{2t^2}$$

(for en ubestemt konst. C_2)

Oppg Løs diff. likn.

$$(t^2+1)\,y' + 2t\cdot y = 1 \quad \text{med}$$

$$y(0) = 2024$$

Løsning Setter $u(t) = t^2+1$. Da har vi

$$u\cdot y' + u'\cdot y = 1$$

dvs $$(u\cdot y)'_t = 1$$

så $$u\cdot y = t + C$$

så $$y(t) = \frac{t+C}{t^2+1}$$ C ukjent konst.

Med $y(0) = 2024$ får vi $2024 = \frac{0+C}{0^2+1} = C$

så $$y(t) = \frac{t+2024}{t^2+1}$$

Std. metode: Først få diff. likn. på std. form:

$$y' + \frac{2t}{t^2+1}\cdot y \overset{(*)}{=} \frac{1}{t^2+1} \qquad |\cdot u(t)$$

u ukjent funksjon

$$(uy)' \overset{\text{vil}}{=} uy' + \frac{2t}{t^2+1}\cdot u\cdot y = \frac{u}{t^2+1}$$

dvs $$u' = \frac{2t}{t^2+1}\cdot u$$

$v = t^2+1$, $dv = 2t\,dt$

$$\frac{u'}{u} = \frac{2t}{t^2+1} \quad \text{og} \quad \ln|u| = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{v}\,dv$$

$$\ln|u| = \ln|v| = \ln(t^2+1) + C_1$$

$$|u| = e^{\ln(t^2+1) + C_1}$$

$$|u| = (t^2+1) \cdot e^{C_1}$$

$$u(t) = \pm C \cdot (t^2+1) \overset{\text{velger } C=1}{=} \underline{t^2+1}$$

Multipliserer (*) med t^2+1 på BS og får den opprinnelige likningen

$$(t^2+1)y' + 2t \cdot y = 1$$, osv. som over.