ELE 3719, 13. forelesning, 4. okt. 2025, Runar Ile

1. Repetisjon
2. Andre ordens lineære differensialligninger

1. Repetisjon Første ordens lineære diff. likn.

$$(*) \quad y' + a(t)\cdot y = b(t)$$

(med én ubest. konst.)

Hvis $y_h(t)$ er den generelle løsningen på den homogene diff. likningen

$$y' + a(t)\,y = 0$$

og $y_p(t)$ er en spesiell løsning på $(*)$, så er $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ den generelle løsningen på $(*)$.

Konstante koeffisienter: faste tall

$$y' + ay = b$$

Da er $y(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$ den generelle løsn. (C ubest. konst.)

Hvis $a(t)$ ikke konst: Integrerende faktor $u(t)$ som vi multiplisérer VS og HS av $(*)$ med:

$$(u\cdot y)' \overset{\text{vil at}}{=} u\cdot y' + u\cdot a(t)\cdot y = b(t)\cdot u$$

Da må $u'(t) = u(t)\cdot a(t)$ – en separabel diff.likn. som har løsn. $u(t) = e^{\int a(t)\,dt}$ ← velger en grei anti-derivert til $a(t)$.

Det gir $\left(\underbrace{e^{\int a(t)\,dt}}_{u} \cdot y\right)' = b(t) \cdot \underbrace{e^{\int a(t)\,dt}}_{u}$

Integrerer $e^{\int a(t)dt} \cdot y = \int \left(b(t) \cdot e^{\int a(t)dt}\right) dt$

Beregner HS og deler på $u = e^{\int a(t)dt}$ på BS.

NB: husk å ta med den ubestemte konstanten i integralet på HS.

Eks (Arbeidsboken 12.6.2) Finn den generelle løsningen på diff.likn. $t^3 y' + 2y = 1$.

Løsning

① Skriver diff.likn. på std.form ved å dele ~~på~~ med t^3 på BS.

$$y' + \frac{2}{t^3} \cdot y = \frac{1}{t^3}$$

Her er $a(t) = \frac{2}{t^3} = 2 \cdot t^{-3}$ og $b(t) = \frac{1}{t^3} = t^{-3}$

② Setter $u(t) = e^{-t^{-2}}$ fordi $(-t^{-2})' = -(-2)t^{-2-1} = 2t^{-3} = a(t)$

og multiplisere BS med den:

$$\underbrace{\left(e^{-t^{-2}} \cdot y\right)'}_{} = t^{-3} \cdot e^{-t^{-2}}$$

$$e^{-t^{-2}} \cdot y' + 2t^{-3} \cdot e^{-t^{-2}} \cdot y$$

③ $e^{-t^{-2}} \cdot y = \int t^{-3} \cdot e^{-t^{-2}} \, dt$

HS: Int. ved substitusjon.

Setter $v(t) = -t^{-2}$

$dv = (-t^{-2})' \cdot dt$

$dv = 2t^{-3} \cdot dt$

$\frac{1}{2} \cdot dv = t^{-3} \cdot dt$

$e^{-t^{-2}} \cdot y = \frac{1}{2} \int e^v \, dv$

$e^{-t^{-2}} \cdot y = \frac{1}{2} e^v + C = \frac{1}{2} e^{-t^{-2}} + C$

④ Deler på $e^{-t^{-2}}$ på BS

= multiplisere med $e^{t^{-2}}$ på BS

Får $\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{2} + C \cdot e^{t^{-2}}}}$

Stabil likevekt Hva skjer med løsningen hvis $t \to \infty$?

$y(t) = \frac{1}{2} + C \cdot e^{t^{-2}} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{2} + C \cdot e^0 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + C}}$

$t^{-2} = \frac{1}{t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

– kalles den stabile likevektstilstanden til diff. likn. (systemet)

Merk Grensen er avhengig av hva C er.

Da er ikke diff. likn. globalt asymptotisk stabil

2. Andre ordens lineære diff. likninger

Std. form: $y'' + a(t)\cdot y' + b(t)\cdot y = g(t)$

Vi ser bare på tilfellet $a(t) = a$ og $b(t) = b$ er konstante. Da løser vi diff. likn. slik:

(1) Finner den generelle løsn. $y_h(t)$ på den homogene likn.

$$y'' + a\cdot y' + b\cdot y = 0$$

ved å bruke karakteristisk likning
(får to ukjente konstanter)

(2) Finner en spesiell løsning $y_p(t)$ på den inhomogene likn.

$$y'' + a\cdot y' + b\cdot y = g(t)$$

(3) Den generelle løsningen er da

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

(ved superposisjonsprinsippet)

Start: 15.01

Eks $y'' - 3y' + 2y = 6$

$a(t) = -3$
$b(t) = 2$
$g(t) = 6$

① Finner $y_h(t)$ ved å løse den karakteristiske likningen

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

som har røtter (løsninger) $r_1 = 1$ og $r_2 = 2$

Da er $y_h(t) = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}$

$$= \underline{C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t}}$$

② "Gjetter" på at $y_p(t) = A$ (en konstant funksjon)

Da $y_p'(t) = 0$ og $y_p''(t) = 0$

Diff. likn. blir da $0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot A = 6$

så $A = 3$ og $\underline{y_p(t) = 3}$

③ $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$= \underline{C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 3}$$ (den generelle løsningen)

Sjekker løsningen

$$y'(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$$

$$y''(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{2t}$$

VS $y'' - 3y' + 2y =$

$$c_1 e^t + 4c_2 e^{2t}$$
$$-3c_1 e^t - 6c_2 e^{2t}$$
$$+2c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 6$$

$$= 0 \cdot c_1 e^t + 0 \cdot c_2 e^{2t} + 6 = 6$$

HS 6 — så OK.

Oppg Finn den generelle løsn. på diff. likn.

$$y'' - 5y' + 4y = 1$$

og sjekk svaret.

Løsning Kar. likn $r^2 - 5r + 4 = 0$

har løsn. $r_1 = 1$ og $r_2 = 4$ så

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

"Gjetter" på $y_p(t) = A$. Da er $y_p'(t) = 0$ og $y_p''(t) = 0$

så diff. likn blir $4A = 1$ så $A = \frac{1}{4} = y_p(t)$

Den generelle løsningen er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t} + \frac{1}{4}$$

Sjekker løsningen:

$$y'(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{4t}$$

$$y''(t) = C_1 e^t + 16 C_2 e^{4t}$$

VS

$$\begin{array}{rll} & C_1 e^t + 16 C_2 e^{4t} & (y'') \\ & -5C_1 e^t - 20 C_2 e^{4t} & (-5y') \\ & +4C_1 e^t + 4 C_2 e^{4t} + 4 \cdot \frac{1}{4} & (4y) \\ \hline & 0 \cdot C_1 e^t + 0 \cdot C_2 e^{4t} + 1 = 1 & \end{array}$$

HS 1

– så ok.

Anta $y(t)$ over tilfredstiller initialbetingelsene

$$y(0) = \frac{9}{4} \quad \text{og} \quad y'(0) = -7.$$

Bestemmer C_1 og C_2 ved å bestemme $y(t)$ i den generelle løsningen.

$y(0) = \frac{9}{4}$ betyr $C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^{4 \cdot 0} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

dvs $C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

dvs $C_1 + C_2 = \frac{8}{4} = 2 \quad (I)$

$y'(0) = -7$ betyr $C_1 \cdot e^0 + 4 \cdot C_2 e^{4 \cdot 0} = -7$

$C_1 + 4C_2 = -7 \quad (II)$

(II) – (I) $3C_2 = -9 \quad | : 3$

$C_2 = \frac{-9}{3} = \underline{-3}$ så $\underline{C_1 = 5}$

og $y(t) = 5e^{t} - 3e^{4t} + \frac{1}{4}$

Start: 16.00

Den generelle homogene diff. likn.

$$y'' + ay' + by = 0$$

har kar. likn. $r^2 + ar + b = 0$

som har løsninger $r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Tre tilfeller

1) to forskjellige røtter r_1 og r_2

Da er $y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

2) en dobbeltrot r

Da er

$$y_h(t) = (C_0 + C_1 \cdot t) e^{rt}$$

NB!

Eks: $r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3)(r-3) = 0$

så $r = 3$ er en dobbeltrot

3) ingen røtter – finnes formel for $y_h(t)$, men den er ikke pensum (lenger).

Oppg Finn den generelle løsningen til diff. likn.

$$y'' + 4y' + 4y = 1000$$

Løsning Kar. likn. $r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r+2)(r+2) = 0$

så $r = -2$ er en dobbelrot.

Da er $y_h(t) = \underline{(C_0 + C_1 t)e^{-2t}}$

og $y_p(t) = \frac{1000}{4} = \underline{250}$ (konstantfunksjon)

Så den generelle løsningen er

$$\underline{\underline{y(t) = (C_0 + C_1 t)e^{-2t} + 250}}$$

Oppg. • Bestem den stabile likevektstilstanden til løsningene av denne diff. likn.

• Avgjør om diff. likn. er globalt asymptotisk stabil.

Løsning Vi har $y(t) = \frac{C_0 + C_1 t}{e^{2t}} + 250$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_0 + C_1 t}{e^{2t}} \overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{C_1}{2e^{2t}} = 0$$

" $\frac{\pm\infty}{\infty}$ "

Kan også (alternativt) si at e^{2t} vokser raskere enn alle polynomer og derfor vil $\frac{C_0 + C_1 t}{e^{2t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Dvs. $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 + 250 = \underline{\underline{250}}$

som er den stabile likevektstilstanden

Diff. likn. er globalt asymptotisk stabil fordi $\lim_{t \to \infty} y(t) = 250$

er uavhengig av hva konstantene C_0 og C_1 er.