ELE 3719, 14. forelesning, 11. nov. 2025, Runar Ile

1. Variasjonsregning - et motiverende eksempel
2. Eulerlikningen
3. Betingelser for maks/min.

1. Variasjonsregning - et eksempel (makro)

„Hvor mye bør en nasjon spare?"

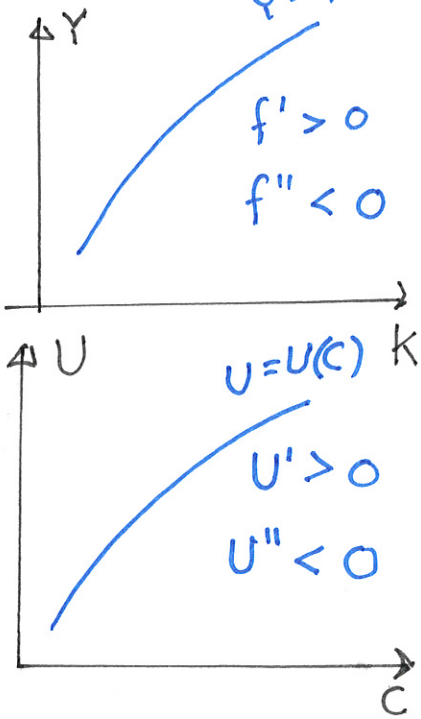
Vi ser på en økonomi som endrer seg med tiden t.

$K = K(t)$ kapitalmengde ved tid t

$C = C(t)$ forbruk pr. år ved tid t

$Y = Y(t)$ netto nasjonalprodukt pr. år ved tid t.

Antar at nasjonalproduktet bare avhenger av kapitalmengden: $Y = f(K)$



Nasjonalproduktet fordeles på forbruk og sparing

$$Y = C + K_t'$$

Vi har en (kjent) nytte funksjon $U(C)$. Anta r er en positiv konstant (renten).

Da er nåverdien av nytten i tidsintervallet $[0, T]$ gitt som

$$\int_0^T U(C) \cdot e^{-rt}\, dt$$

$$= \int_0^T U(Y - K_t') \cdot e^{-rt}\, dt = \int_0^T U(f(K) - K_t')\, e^{-rt}\, dt$$

Vil finne $K(t)$ som gjør dette integralet størst mulig

Må ha initialbetingelser for at problemet skal ha en løsning.

F.eks. $K(0) = K_0$ (et tall) og $K(T) = K_T$ (et tall)

Dette er et variasjonsregningsproblem.

Generelt Bestem $y(t)$ slik at

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} F(t, y, y')\, dt$$ blir størst mulig (el. minst)

---

2. Eulerlikningen

EKS Vi beregner $\int_0^1 4ty - (y')^2\, dt$ for

a) $y(t) = t$

b) $y(t) = t^2$

c) $y(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^2$

} alle har initialbetingelser $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

---

a) $y'(t) = 1$ s: $4ty - (y')^2 = 4t \cdot t - 1^2 = 4t^2 - 1$

Beregner $\int_0^1 4t^2 - 1\, dt = \left[\frac{4}{3}t^3 - t\right]_{t=0}^{t=1}$

$= \frac{4}{3} - 1 - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

b) $y'(t) = 2t$ så $4ty - (y')^2 = 4t \cdot t^2 - (2t)^2 = 4t^3 - 4t^2$

Beregner $\int_0^1 4t^3 - 4t^2\,dt = \left[t^4 - \frac{4}{3}t^3 \right]_{t=0}^{t=1} = 1 - \frac{4}{3} - 0 = -\frac{1}{3}$

c) $y'(t) = \frac{3}{2} - t$ og $\int_0^1 4t\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^2\right) - \left(\frac{3}{2} - t\right)^2 dt$

$= \overset{\text{(regner)}}{\ldots\ldots} = \frac{5}{12}$

Resultat Funksjonen $y = y(t)$ som gjør

$\int_{t=t_0}^{t=t_1} F(t, y, y')\,dt$ størst (eller minst)

med $y(t_0) = y_0$ og $y(t_1) = y_1$ (el. lign.)

oppfyller Euler-likningen

$$F_y' - \frac{d(F_{y'}')}{dt} = 0 \qquad = (F_{y'}')_t'$$

Tenker på F som en funksjon i tre uavhengige variabler t, y, y'

Men her tenker vi på $F_{y'}', y, y'$ som funksjoner av t.

Eks (forts) $F(t, y, y') = 4ty - (y')^2$

Da er $F_y' = 4t$

$F_{y'}' = -2y'$

$$\frac{d(F_{y'}')}{dt} = (-2y')_t' = -2y''$$

Eulerlikningen: $4t - (-2y'') = 0$

– dette er en differensiallikning!

$$y''(t) = \frac{-4t}{2} = -2t$$

gir $y'(t) = -t^2 + C_1$

gir $\underline{y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + C_1 t + C_0}$

Bestemmer C_0 og C_1 fra initialbetingelsene

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} C_0 = 0 \\ -\frac{1}{3} + C_1 = 1 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

og $\underline{y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t}$

Vi skriver ofte $y^*(t)$ for løsningen på Eulerlikningen.

Start: 15.03

Eks (forts) Beregner $\int_0^1 4ty - (y')^2 \, dt$

for $y^*(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t$:

$$\int_0^1 4t\left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t\right) - \left(-t^2 + \frac{4}{3}\right)^2 dt$$

regner $= \int_0^1 -\frac{7}{3}t^4 + \frac{24}{3}t^2 + \frac{16}{9} \, dt = \left[-\frac{7}{15}t^5 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{16}{9}t\right]_{t=0}^{t=1}$

$$= -\frac{7}{15} + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - 0 = \frac{19}{45}$$

Vi har faktisk at $\frac{5}{12} < \frac{19}{45} = 0,4222$

$\approx 0,41667$ (litt større)

Løsningen på Eulerlikningen $y^*(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t$ er en kandidat for maks. (el. min.) i variasjonsregningsproblemet.

Trenger et kriterium for å sikre at $y^*(t)$ gir maks. (est. min.)

3. Betingelser for maks/min

Resultat Anta $y^*(t)$ er en løsning på Euler likningen til variasjonsproblemet

$$\text{maks/min} \int_{t_0}^{t_1} F(t, y, y')\, dt \quad \text{der} \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$$

1) Hvis $F(t, y, y')$ er <u>konkav</u> som en funksjon i y og y', så er $y^*(t)$ løsningen på <u>maks.</u> problemet

2) Hvis $F(t, y, y')$ er <u>konveks</u> som en funksjon i y og y', så er $y^*(t)$ løsningen på <u>min.</u> problemet

---

Eks (forts) $F(t, y, y') = 4ty - (y')^2$

$F'_y = 4t$

$F'_{y'} = -2y'$

gir

$F''_{yy} = (F'_y)'_y = (4t)'_y = 0 = A$

$F''_{yy'} = (F'_y)'_{y'} = (4t)'_{y'} = 0 = B$

$F''_{y'y'} = (F'_{y'})'_{y'} = (-2y')'_{y'} = -2 = C$

(1) $AC - B^2 = 0 \cdot (-2) - 0^2 = 0 \geq 0$

(2) $A = 0 \leq 0$

(3) $C = -2 \leq 0$ (og ikke identisk 0)

} for alle y, y' og t

Konklusjon F er konkav som funksjon i variablene y og y' og da gir

$y^*(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t$ maks. i variasjonsproblemet (med resultat på s. 6)

Eks a) Vis at $F(t, y, y') = y^2 + (y')^2 + t^2$ er konveks i y og y'.

b) Løs variasjonsproblemet

$$\text{maks/min} \int_0^1 y^2 + (y')^2 + t^2 \, dt \text{ når } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Løsning a) $F'_y = 2y$ og $F'_{y'} = 2y'$

$F''_{yy} = 2$

$F''_{yy'} = 0$

$F''_{y'y'} = 2$

$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 \geq 0$

$A = 2 \geq 0$ (og ikke identisk lik 0)

$C = 2 \geq 0$

Så F er konveks i y og y'.

b) Har at $\frac{d(F_{y'})}{dt} = (2y')_t' = 2y''$

Eulerlikningen: $2y - 2y'' = 0 \quad | : (-2)$

$y'' - y = 0$ (std. form)

Har. likning: $r^2 - 1 = 0$

– som har løsn. $r = \pm 1$

og $y(t) = \underline{C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}}$

Bestemmer C_1 og C_2 fra initialbetingelsene.

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 & (I) \\ C_1 e^{-1} + C_2 e^{1} = 1 & (II) \end{cases}$$

Setter $C_1 \overset{(I)}{=} -C_2$ og setter inn i (II):

$$-C_2 e^{-1} + C_2 e = 1$$

$$C_2 (e - e^{-1}) = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{e - e^{-1}}$$

så $C_1 = -C_2 = \frac{-1}{e - e^{-1}}$

Så $y^*(t) = \underline{\underline{\frac{-1}{e-e^{-1}} \cdot e^{-t} + \frac{1}{e-e^{-1}} \cdot e^{t}}}$

som ved (a) gir minimum i variasjonsproblemet.

Start: 16.02

Eksamen 2013, oppg 6 (variasjonsregning)

$$\text{maks/min} \int_0^3 \ln(4y - y')\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 3 \\ y(3) = -9e^{12} \end{cases}$$

a) Finn Eulerlikningen og løsningen $y^*(t)$ på Eulerlikningen.

b) Avgjør om $F = \ln(4y - y')$ er konveks eller konkav som funksjon i y og y'.

Bruk dette til å avgjøre $y^*(t)$ gir maks. eller min. i variasjonsproblemet

---

a) $$F'_y = \frac{1}{u} \cdot 4 = \frac{4}{4y - y'}$$

$$F'_{y'} = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{-1}{4y - y'}$$

$$\frac{d(F'_{y'})}{dt} = \left(\frac{-1}{4y - y'}\right)'_t$$

$$= \frac{1}{u^2} \cdot (4y' - y'')$$

$$= \frac{4y' - y''}{(4y - y')^2}$$

Kjerneregelen:

$u = 4y - y'$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'_y = 4$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

Kjerneregelen:

$u = 4y - y'$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'_{y'} = -1$ $\quad g(u) = \frac{1}{u}$

Kjerneregelen:

$u = 4y - y'$ og $g(u) = \frac{-1}{u}$

$= -u^{-1}$

$u'_t = 4y' - y''$ $\quad g'(u) = u^{-2}$

$= \frac{1}{u^2}$

Eulerlikn: $\frac{4}{4y-y'} - \frac{4y'-y''}{(4y-y')^2} = 0 \quad | \cdot (4y-y')^2$

$$4(4y-y') - (4y'-y'') = 0$$

$$16y - 4y' - 4y' + y'' = 0$$

$$\underline{y'' - 8y' + 16y = 0}$$

Kar. likn. $\quad r^2 - 8r + 16 = 0$

som har løsning $r = 4$ (dobbeltrot: $(r-4)^2 = r^2 - 8r + 16$)

Generelle løsningen: $y(t) = (C_0 + C_1 t)e^{4t}$

NB!

Initialbet. bestemmer C_0 og C_1:

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(3) = -9e^{12} \end{cases} \text{ gir } \begin{cases} C_0 = 3 \\ (C_0 + 3C_1)e^{12} = -9e^{12} \end{cases}$$

$$\text{dvs } \begin{cases} C_0 = 3 \\ 3 + 3C_1 = -9 \end{cases} \quad \text{dvs } \begin{cases} C_0 = 3 \\ C_1 = -4 \end{cases}$$

så $\underline{\underline{y^*(t) = (3-4t)e^{4t}}}$ (løsn. på Eulerlikn.)

b) $F''_{yy} = \left(\frac{4}{4y-y'}\right)'_y \overset{\text{kjerner.}}{=} \frac{-16}{(4y-y')^2} = A$

$F''_{yy'} = \left(\frac{4}{4y-y'}\right)'_{y'} \overset{\text{kjerner.}}{=} \frac{4}{(4y-y')^2} = B$

$F''_{y'y'} = \left(\frac{-1}{4y-y'}\right)'_{y'} \overset{\text{kjerner.}}{=} \frac{-1}{(4y-y')^2} = C$

$$AC - B^2 = \frac{-16}{(4y-y')^2} \cdot \frac{-1}{(4y-y')^2} - \left(\frac{4}{(4y-y')^2}\right)^2$$

$$= \frac{16-16}{(4y-y')^4} = 0 \geq 0 \quad \text{for alle } y, y', t.$$

$$A = \frac{-16}{(4y-y')^2} \leq 0$$

og $C = \frac{-1}{(4y-y')^2} \leq 0$

(og ikke begge identisk lik 0)

Da er F konkav som funksjon i y og y'.

Dermed gir $y^*(t) = (3-4t)e^{4t}$ maksimum i variasjonsproblemet.