ELE 3719, 15. forelesning, 18. nov. 2025, Runar Ile

1. Repetisjon: Variasjonsregning
2. Optimal kontrollteori

---

1. Rep: Variasjonsregning

Bestem $y = y(t)$ slik at $\int_a^b F(t, y, y')\,dt$ blir størst (minst) mulig.

Initialbetingelser:
$$\begin{cases} y(a) = y_0 & (1) \\ y(b) = y_1 & (2) \end{cases}$$

En løsning $y(t)$ på dette problemet tilfredsstiller

Eulerlikningen $F_y' - \dfrac{d(F_{y'}')}{dt} = 0$

– dette er en differensialligning.

Anta $y^*(t)$ er en løsning av Euler + (1) + (2).

Hvis

- F er konkav som en funksjon av y og y' $\Rightarrow$ $y^*(t)$ løser maks. problemet
- F er konveks som en funksjon av y og y' $\Rightarrow$ $y^*(t)$ løser min. problemet

Eks Finn $y = y(t)$ med $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2) = \dfrac{9 - e^2}{2} \end{cases}$ som løser variasjonsprobl.

$$\text{maks} \int_0^2 e^t y - (y')^2\,dt$$

Løsning Setter $F(t, y, y') = e^t y - (y')^2$ (1)

Da er $F'_y = e^t$ og $F'_{y'} = -2y'$

① Eulerlikningen: $e^t - (-2y')'_t = 0$

dvs $e^t + 2y'' = 0$

dvs $y''(t) = -\frac{e^t}{2}$

så $y'(t) = -\frac{e^t}{2} + C_1$

og $y(t) = -\frac{e^t}{2} + C_1 t + C_0$

② Bestemmer C_0 og C_1. Bruker $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2) = \frac{9-e^2}{2} \end{cases}$

dvs $\begin{cases} -\frac{e^0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_0 = 0 \\ -\frac{e^2}{2} + C_1 \cdot 2 + C_0 = \frac{9-e^2}{2} \end{cases}$

dvs $\begin{cases} C_0 = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \\ C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$

så $y^*(t) = -\frac{e^t}{2} + 2t + \frac{1}{2}$

③ $y^*(t)$ løser maks.probl. hvis $F(t, y, y')$ er konkav som funksjon av y og y'

Bruker ABC-testen:

$F''_{yy} = (e^t)'_y = 0 = A$

$F''_{yy'} = (e^t)'_{y'} = 0 = B$

$F''_{y'y'} = (-2y')'_{y'} = -2 = C$

for alle t, y, y':

$AC - B^2 = 0 \cdot (-2) - 0^2 = 0 \geq 0$

$A = 0 \leq 0$ og ikke begge identisk like 0

$C = -2 \leq 0$

Da er F konkav i y og y'.

Konkl: $y^*(t)$ løser variasjonsprobl.

2. Optimal kontrollteori

Det grunnleggende problemet: Vil maksimere (minimere)

$$\int_a^b F(t, y, u)\, dt \quad \text{der} \quad \begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

$y = y(t)$ „tilstandsvariabelen" } – begge disse funksjonene skal finnes!
$u = u(t)$ „kontrollvariabelen" }

Dette oppsettet generaliserer variasjonsregningsprobl.
– fordi: kan sette ~~dette~~ $G(t, y, u) = u$ så (1) blir $y' = u$

og $F(t, y, u) = F(t, y, y')$.

Hvordan løser vi kontrollproblemer?

Pontryagins maksimumsprinsipp

Hvis $y(t)$ og $u(t)$ er en løsning på kontrollproblemet, vil følgende likninger holde:

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$ – første ordens Pontryagin betingelsene

Her er $p = p(t)$ en ny, ukjent hjelpefunksjon fra (1).

og enten $H(t, y, p, u) = F(t, y, u) + p(t) \cdot G(t, y, u)$

– gir den normale løsningen (evt.)

eller $H(t, y, p, u) = p(t) \cdot G(t, y, u)$

– gir den degenererte løsningen

Som økonomer er vi bare interessert i den normale løsningen.

$H(t, y, p, u)$ kalles Hamiltonfunksjonen til problemet

Start: 15.03

Eks Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 \overbrace{y - u^2}^{F}\, dt \quad \text{der} \quad \begin{cases} y' = \overbrace{y+u}^{G} & (1) \\ y(0) = 1 & (2) \\ y(1) = e - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

Bruker Pontryagins maks. prinsipp til å finne en normalløsning på kontrollproblemet (finner både $y(t)$ og $u(t)$).

① For den normale løsningen er Hamiltonfunksjonen $H = F + p \cdot G = y - u^2 + p(y+u)$

② H konkav i y og u:

$$\begin{cases} H_y' = 1 + p \\ H_u' = -2u + p \end{cases}$$

$$H_{yy}'' = (1+p)_y' = 0 = A$$

$$H_{yu}'' = (1+p)_u' = 0 = B$$

$$H_{uu}'' = (-2u+p)_u' = -2 = C$$

ABC-testen

$AC - B^2 = 0 \cdot (-2) - 0^2 = 0 \geq 0$

$A = 0 \leq 0$

$C = -2 \leq 0$ (ikke identisk lik 0)

Konkl: H konkav i y og u.

③ Første ordens Pontryagin betingelser

$$\begin{cases} -2u + p = 0 \\ p'(t) = -(1+p) \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} p = 2u & (4) \\ p' + p = -1 & (5) \end{cases}$$

Elliminerer p og p':

$$p \overset{(1) \text{ og } (4)}{=} 2(y' - y) = 2y' - 2y \quad \text{– deriverer BS mhp. } t$$

$$p' = 2y'' - 2y'$$

$$-1 \overset{(5)}{=} p' + p = 2y'' - 2y$$

Dette er en lin. andre ordens diff. likn.

som på std. form blir $\boxed{y'' - y = -\frac{1}{2}}$ (*)

Kar. likn. $r^2 - 1 = 0$ så $r = \pm 1$

Den generelle, homogene, løsningen er:

$$y_h(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$$

"Gjetter" på at $y_p(t) = A$, $y_p'(t) = 0$, $y_p''(t) = 0$

(*) gir $0 - A = -\frac{1}{2}$

så $A = \frac{1}{2}$

og $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \boxed{C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}}$

(4) Bestemmer C_1 og C_2 fra (2) og (3)

(2) $y(0) = 1$ gir $C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \frac{1}{2} = 1$

$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$

$C_2 = \frac{1}{2} - C_1$

(3) $y(1) = e - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$ gir

$C_1 \cdot e^1 + C_2 \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} = e - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$

$C_1 e + \left(\frac{1}{2} - C_1\right) e^{-1} = e - \frac{1}{2e}$

$C_1 (e - e^{-1}) = e - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} e^{-1} = e - e^{-1}$

så $C_1 = 1$ og $C_2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

så $y^*(t) = e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2}$

(5) Hva er $u(t)$? Fra (1) er $u = y' - y$

og $y'(t) = e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$ så:

$$u^*(t) = e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - (e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}) = \underline{\underline{e^{-t} - \frac{1}{2}}}$$

Konklusjon Fordi H er konkav i y og u er $y^*(t)$ og $u^*(t)$ som gitt over en løsning på kontrollproblemet.

Start: 15.52

Eks Vi har kontrollproblemet

$$\max \int_0^1 -y^2 - \frac{1}{2}u^2 \, dt \quad \text{der}$$

$$\begin{cases} y' = y + u & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \\ y(1) = 4(e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}) & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontr. maks. prinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (angi både $y(t)$ og $u(t)$).

Løsning

(1) Hamiltonfunksjonen $H = F + p \cdot G = -y^2 - \frac{1}{2}u^2 + p(y+u)$

(2) ABC-test for å vise at H er konkav i y og u.

$$H'_y = -2y + p \quad \text{og} \quad H'_u = -u + p$$

$$H''_{yy} = (-2y+p)'_y = -2 = A$$

$$H''_{yu} = (-2y+p)'_u = 0 = B$$

$$H''_{uu} = (-u+p)'_u = -1 = C$$

$AC - B^2 = (-2)(-1) - 0^2 = 2 \geq 0$

$A = -2 \leq 0$ ikke identisk lik 0

$C = -1 \leq 0$

– gjelder for alle t, y, p, u.

Konkl: H er konkav i y og u.

③ Første ordens Pontryagin bet:

$$\begin{cases} H_u' = 0 \\ p'(t) = -H_y' \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} -u+p=0 \\ p' = -(-2y+p) \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} u = p & (4) \\ p'+p = 2y & (5) \end{cases}$$

(1) gir $u = y'-y$, innsatt i (4): $y'-y = p$

deriverer: $y''-y' = p'$

Sum: $y''-y = p'+p \overset{(5)}{=} 2y$

Får $\boxed{y''-3y=0}$ – lineær, 2. ordens homog. diff. m. konst. koeff. på std. form

Kar. likn: $r^2-3=0$ si $r = \pm\sqrt{3}$

dvs $y(t) = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}t}$

④ Bestemmer C_1 og C_2 fra (2) og (3)

(2) gir $C_1 + C_2 = 0$, dvs $C_2 = -C_1$

(3) $C_1 e^{\sqrt{3}} - C_1 e^{-\sqrt{3}} \overset{(3)}{=} 4(e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}})$

$C_1(e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}) \Rightarrow C_1 = 4$ og $C_2 = -4$

Så $y^*(t) = 4(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t})$

⑤ Bestemmer $u(t)$.

Fra (1): $u = y'-y$

$y'(t) = 4\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} + 4\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}$

$y(t) = 4e^{\sqrt{3}t} - 4e^{-\sqrt{3}t}$

$u^*(t) = 4(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}t} + 4(\sqrt{3}+1)e^{-\sqrt{3}t}$

Konklusjon $y^*(t)$ og $u^*(t)$ gitt over løser kontrollproblemet.