ELE 3719, 6. forelesning, 16. sept. 2025, Runar Ile

1. Egenverdiene til kvadratiske former
2. Stasjonære punkter og konveksitet for andregradsfunksjoner

1. Egenverdiene til kvadratiske former

Til en kvadratisk form $Q(\underline{x})$ finnes en symmetriske matrise A slik at

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$$

$\underline{x}^T = [x_1\ x_2 \dots x_n]$, A er $n \times n$, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Eks 1 $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

matrisemult.

Resultat Anta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ er egenverdiene til A. Da er $Q(\underline{x})$

pos. semidefinitt $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \geq 0$
dvs $Q(\underline{x}) \geq 0$

neg. semidefinitt $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \leq 0$
dvs $Q(\underline{x}) \leq 0$

pos. definitt $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$
dvs $Q(\underline{x}) > 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0}$

neg. definitt $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$
dvs $Q(\underline{x}) < 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0}$

indefinitt $\Leftrightarrow$ det finnes både pos. og neg. egenverdier
dvs $Q(\underline{x})$ har både pos. og neg. verdier

Eks $Q(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

– kan vi få alle kvadratiske former til å se slik ut etter et variabelskifte? (Svar: Ja).

Eks 1 (forts) Er $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ pos/neg (semi) definitt?

Finner egenverdiene:

Kar. likningen $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 11 \overset{\text{likn.}}{=} 0$

dvs $(\lambda-4)^2 = 16-11 = 5$

Så egenverdiene er løsningene $\lambda = 4 \pm \sqrt{5} > 0$

Altså (ved resultatet over) er $Q(\underline{x})$ pos. def.

så $Q(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ og

$\underline{x} = (0,0)$ er et globalt minimumspunkt for $Q(\underline{x})$.

Eks (jmf. oppg 5.18) Anta $Q(\underline{x}) = 17x_1^2 - 8x_1x_2 + 23x_2^2$

a) Avgjør om $Q(\underline{x})$ er pos. el. neg. (semi)definitt, eller indefinitt.

b) Finn et variabelskifte slik at den kvadratiske formen med de nye variablene er "diagonal" (ingen "kryssledd").

Plan a) Finner egenverdiene til $A = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 23 \end{bmatrix}$ og bruker resultatet.

b) Finner egenvektorer $\underline{y}_1$ og $\underline{y}_2$ med lengde 1.

setter $P = [\underline{y}_1 : \underline{y}_2]$, innfører variabler $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

slik at $\underline{x} = P\underline{y}$. Regner ut den kvadr. formen med de nye variablene og ser at den er uten kryssledd.

Gjennomføring

a) Kar. likn: $\det(A - \lambda I) = 0$

dvs $\begin{vmatrix} 17-\lambda & -4 \\ -4 & 23-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 40\lambda + 375 = 0$ likn.

Egenverdiene er løsningen til den kar. likn.:

$$\lambda = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 375}}{2 \cdot 1} = 20 \pm 5$$

så $\underline{\lambda_1 = 15}$ og $\underline{\lambda_2 = 25}$

Begge egenverdiene er positive, så ved resultatet er $Q(\underline{x})$ pos. definitt.

b) For å finne P trenger vi egenvektorer av lengde 1:

$\underline{\lambda_1 = 15}$ Løser $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}}_{A - 15I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2\cdot} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $x_2 = s$ (fri parameter)

og $2x_1 - 4s = 0$ så $x_1 = \frac{4s}{2} = 2s$

gir $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Har $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Setter $\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ som har lengde 1.

↑

tar $s = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\lambda_2 = 25$ Løser likningen $(A - 25I)\underline{x} = \underline{0}$

$$A - 25I = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \sim \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så $x_2 = t$ (fri parameter) og $-8x_1 - 4t = 0$

så $x_1 = \frac{+4t}{-8}$ så $\underline{x} = t\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fordi $\left\| \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Setter $t = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ og $\underline{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

som har lengde 1

Setter $P = [\underline{u}_1 \vdots \underline{u}_2]$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ som er ortogonal

Start: 15.04

Da er $P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Vet at $P^T A P = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

Bytter variabler $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underline{y} = P^T\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

NB: $\underline{y} = P^T\underline{x}$ gir $P\underline{y} = PP^T\underline{x} = \underline{x}$

$PP^{-1} = I$

Vil ha $\underline{x}$ uttrykt v.h.a. y_1 og y_2 for å sette inn i $Q(\underline{x}) = Q(x_1, x_2)$

Har $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Py = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2y_1 - y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{bmatrix}$$

den vi fikk oppgitt

$$Q^{ny}(y_1, y_2) = Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 \,,\, \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 \right)$$

$$= 17\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_2\right)^2 - 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2\right)$$

$$+ 23\left(\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2\right)^2 = \text{(regner og regner)} \ldots\ldots\ldots$$

$$= 15 y_1^2 + 25 y_2^2 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

Alltid sånn hvis $P = [\underline{u}_1 \,|\, \ldots \,|\, \underline{u}_n]$, $\underline{u}_i$ egenvektor av lengde 1 med egenverdi λ_i.

Da er $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = P^T A P$. Setter $\underline{x} = P\underline{y}$, dvs

$$\underline{y} = P^T \underline{x}$$

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = (P\underline{y})^T A (P\underline{y}) = Q^{ny}(\underline{y})$$

$$= (\underline{y}^T P^T) A (P\underline{y}) = \underline{y}^T \overbrace{(P^T A P)}^{D} \underline{y}$$

$$= \underline{y}^T D \underline{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Eks (forts) $Q(\underline{x}) = 17x_1^2 - 8x_1x_2 + 23x_2^2$

Vis at nivåkurven $Q(\underline{x}) = 75$ er en ellipse.
Bestem spesielt sentrum og halvaksene til ellipsen.
Lag en skisse av nivåkurven i x_1x_2-koordinat-systemet som også viser y_1y_2-koordinat-systemet.

Løsn Hvis vi byter variabler $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

får vi $Q(\underline{x}) = Q^{ny}(\underline{y})$

$= 15y_1^2 + 25y_2^2$

så nivåkurven er gitt som løsningene til likningen $15y_1^2 + 25y_2^2 = 75$ i y_1y_2-koordinat-systemet

Får standardformen for en ellipselikning ved å dele på 75 på BS.

$$\frac{y_1^2}{5} + \frac{y_2^2}{3} = 1$$

Altså er sentrum i ellipsen $(y_1, y_2) = \underline{(0,0)}$

og halvakser $\underline{a = \sqrt{5}}$ og $\underline{b = \sqrt{3}}$

Skisse: sentrum er $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

y_1-aksen skjærer ellipsen i

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \pm\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

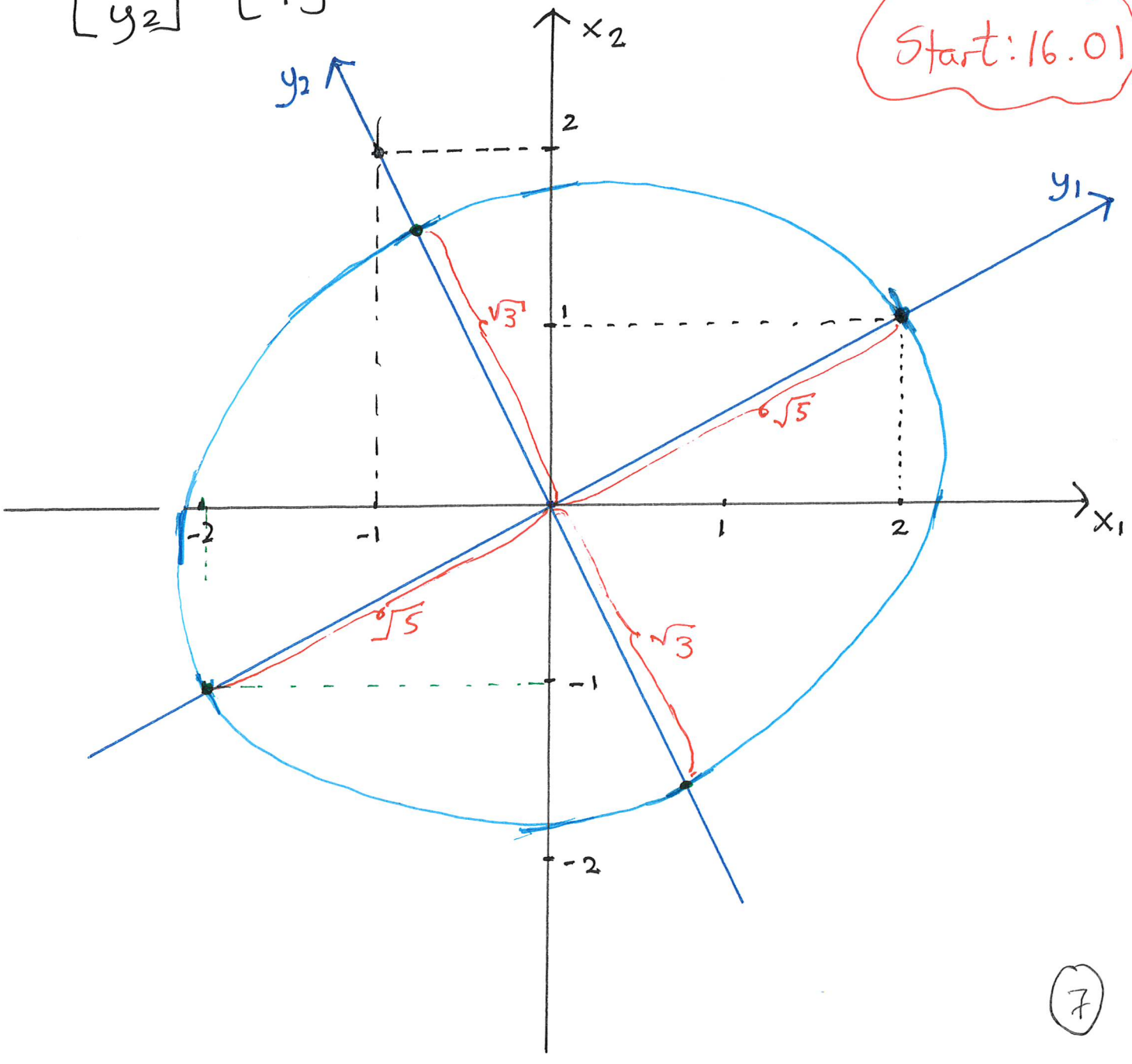
y_2-aksen skjærer ellipsen i

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{3} \end{bmatrix} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tilsvarer } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tilsvarer } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Start: 16.01



2. Stasjonære punkter og konveksitet til andregradsfunksjoner

Andregradsfunksjonen

$$f(\underline{x}) = Q(\underline{x}) + L(\underline{x}) + C$$

$Q(\underline{x})$: kvad. form; $L(\underline{x})$: lin. form; C: konst

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{x}^T = [x_1\ x_2 \dots x_n]. \quad \text{Da er}$$

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A\, \underline{x} + B\underline{x} + C$$

A: symm. $(n \times n)$-matrise

B: $(1 \times n)$-matrise $[b_1\ b_2 \dots b_n]$, så $B\underline{x} = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$

Vil finne maks. og min. til $f(\underline{x})$.

Husk $\underline{x} = \underline{a}$ er et **stasjonært punkt** hvis $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = 0$ for alle i.

Setter $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

Resultat Hvis $f(\underline{x})$ er en andregradsfunksjon (som over), så er

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T$$

Eks $f(x_1, x_2) = \underbrace{x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2}_{Q(\underline{x})} + \underbrace{7x_1 - 8x_2}_{L(\underline{x})} + 5$
" c

Spekker resultatet:

VS: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 4x_2 + 7 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_1 + 6x_2 - 8 \end{cases}$

HS: $\begin{cases} 2A\underline{x} = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix} \end{cases}$

så $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T$ i dette tilfellet.

Stasjonære punkter løser $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$

dvs $2A\underline{x} + B^T = \underline{0}$

dvs $2A\underline{x} = -B^T$

dvs $A\underline{x} = -\frac{1}{2}B^T$ - et lineært likningssystem.

Bruker f.eks. Gausseliminasjon for å løse systemet. (behøver ikke ha løsninger)

Hvis $\det(A) \neq 0$ så er A invertibel

og $\underline{x} = -\frac{1}{2}A^{-1} \cdot B^T$

(i eks.: $\underline{x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 - (-2)(-2)}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \end{bmatrix}$)

Resultat f konveks $\Leftrightarrow$ A pos. semidefinitt
f konkav $\Leftrightarrow$ A neg. semidefinitt

Resultat

Hvis f konveks: Alle stasjonære punkter er globale minimumspunkter.

Hvis f konkav: Alle stasj pkt. er glob. maksimumspunkter.

Hvis A er indefinitt: Alle stasj. pkt. er salpunkter.

Eks (forts) Kar. likn. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ dvs $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$

dvs $(\lambda-2)^2 = 1+4 = 5$

$\lambda = 2 \pm \sqrt{5} = \begin{cases} 2+\sqrt{5} & \text{pos} \\ 2-\sqrt{5} & \text{neg.} \end{cases}$

Så $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 7x_1 - 8x_2 + 5$

har indefinitt A og det stasjonære punktet $\begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \end{bmatrix}$ er et salpunkt.

- ingen globale maks. eller min.