ELE3719, 7. forelesning, 23. sept. 2025, Runar Ile

1. Repetisjon: Andregradsfunksjoner (Eksamen 2019V, oppg 3).
2. Kontinuerlige stokastiske variabler.
3. Forventning og varians.

1. Rep. / Eksamen 2019V, oppg 3

a) $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = 0$ -ok

$\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = 0$ -ok

$\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 = 0$ -ok.

Lengdene:

$$\|\underline{u}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$$\|\underline{u}_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$\|\underline{u}_3\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$$

b) Viser at $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ og $\underline{u}_3$ er egenvektorer for A.

$$A\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)(-1) \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$= 2\underline{u}_1$

så $\underline{u}_1$ er en egenvektor for A

med egenverdi $\underline{\lambda_1 = 2}$.

$$A\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1+0 \\ -1-1-1 \\ 0+1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$= 3\underline{u}_2$ så $\underline{u}_2$ er en egenvektor m. egenverdi

$\underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$

tilsv. regning gir $A\underline{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = 0\cdot\underline{u}_3$

så $\underline{u}_3$ egenvektor m. egenverdi $\underline{\lambda_3 = 0}$

c) $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A\,\underline{x} = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

skal finne tall $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$ s.a. $Q(a,b,c) = 0$ (og minst ett av tallene $\neq 0$)

Hé: Bruker at $A\underline{u}_3 = \underline{0}$, dvs

$\underline{u}_3^T A\,\underline{u}_3 = \underline{u}_3^T\,\underline{0} = 0$. Men da er

$\underline{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

$Q(1,2,1) = \underline{u}_3^T A\,\underline{u}_3 = 0$

så: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ Men også $\underline{x} = t\cdot\underline{u}_3$ for en parameter $t \neq 0$.

d) $Q(\underline{x})$ er <u>pos. semidefinitt</u> fordi de tre egenverdiene til A er 2, 3 og 0 som er større eller lik 0. $Q(\underline{x})$ er ikke pos. definitt fordi 0 er en av egenverdiene.

e) Vi skriver opp $Q^{ny}(\underline{y})$ som andregradsform $= Q(\underline{x})$ uttrykt med $y_1 > y_2$ og y_3. Flere måter:

Løsning 1 Regn ut hva x_1, x_2 og x_3 er uttrykt ved y_1, y_2 og y_3 ved å bruke $\underline{x} = P\underline{y}$ sett inn i $Q(x_1, x_2, x_3)$ og regn ut!

Løsning 2 Vi har $Q^{ny}(\underline{y}) = (\underbrace{P\underline{y}}_{\underline{x}})^T A (\underbrace{P\underline{y}}_{\underline{x}})$

$= \underline{y}^T (P^T A P)\underline{y}$. Regner P^TAP for hånd og får (f.eks. først AP og så $P^T(AP)$)

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} = \lambda_1^2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ = \lambda_2^2 \\ \\ \end{matrix}$$

Så $Q^{ny}(\underline{y}) = \underline{\underline{4y_1^2 + 9y_2^2}}$

(NB: P er ikke ortogonal fordi $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ ikke har lengde 1.)

Løsning 3 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da er $Pe_i = [\underline{u}_1 \vdots \underline{u}_2 \vdots \underline{u}_3]\, e_i = \underline{u}_i$

Da er $P^TAP\, e_i = P^T(A\,\underline{u}_i) = P^T(\lambda_i \underline{u}_i)$

$= \lambda_i P^T \underline{u}_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \cdots \\ \underline{u}_2^T \\ \cdots \\ \underline{u}_3^T \end{bmatrix} \underline{u}_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_i \\ \underline{u}_2 \cdot \underline{u}_i \\ \underline{u}_3 \cdot \underline{u}_i \end{bmatrix}$

$i=1$: $= \lambda_1 \begin{bmatrix} \|\underline{u}_1\|^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \\ \\ = 2 \end{matrix}$ ← kolonne 1 i P^TAP

$i=2$: $\lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \|\underline{u}_2\|^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \\ \\ = 3 \end{matrix}$ ← kolonne 2

$i=3$: $\lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\underline{u}_3\|^2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \\ \\ = 0 \end{matrix}$ ← kolonne 3

Så $P^T A P = \begin{bmatrix} 2\cdot(\sqrt{2})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot(\sqrt{3})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdot(\sqrt{6})^2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Derfor $Q^{ny}(y) = 4y_1^2 + 9y_2^2$

Start: 15.09

f) $\underline{b} = [-18 \quad 6 \quad 6]$

$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + \underline{b}^T$. For å finne stasjonære punkter løser vi likningen

$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$ dvs $2A\underline{x} = -\underline{b}^T \quad | : 2$

$A\underline{x} = -\frac{1}{2}b^T = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

- og løser dette (3×3)-systemet ved Gausseliminasjon .... og får

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ for en parameter t.

Alternativ Bruker variabelskifte $\underline{x} = P\underline{y}$

som gir likningen $AP\underline{y} = -\frac{1}{2}b^T = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

Mult. med P^T fra venstre $\underbrace{P^TAP}\underline{y} = -\frac{1}{2}P^Tb^T$

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← regn!

dvs $\begin{cases} 4y_1 = 12 \\ 9y_2 = 9 \\ 0 = 0 \end{cases}$ gir $\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = t \end{cases}$

Fra $\underline{x} = P\underline{y}$ får vi stas. pkt. (i $\underline{x}$-koordinat)

$$\underline{x} = P\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+t \\ -1+2t \\ -2+t \end{bmatrix}$$ (samme som over)

Fordi egenverdiene er ≥ 0
er dette globale minimumspunkter.
(f er konveks)

---

2. Kontinuerlige stokastiske variabler

Stokastisk forsøk $\begin{cases} 1) \text{ de mulige utfallene er kjente} \\ 2) \text{ de faktiske utfallene er ukjente} \end{cases}$

En variabel X kalles stokastisk hvis verdien av X er avhengig av utfallet til et stokastisk forsøk.

EKS (diskret variabel)

Forsøk kaster to terninger (en rød og en blå)

Stok. var. X = ant. øyne til sammen

Mulig spørsmål: Hva er sanns. for at $X = 6$?
Skriver $P(X=6)$ for denne sannsynligheten.
(teoretisk svar: $P(X=6) = \frac{5}{36}$)

Eks (kontinuerlig stok. var.)

Forsøk Trekker en tilfeldig laks opp av en mær.

Stok. var. X = vekten av denne laksen (i kg)

Da er X et tall i intervallet $[0, 15]$

Y = markedsprisen på laksen

X og Y er to simultant fordelte stok. var.

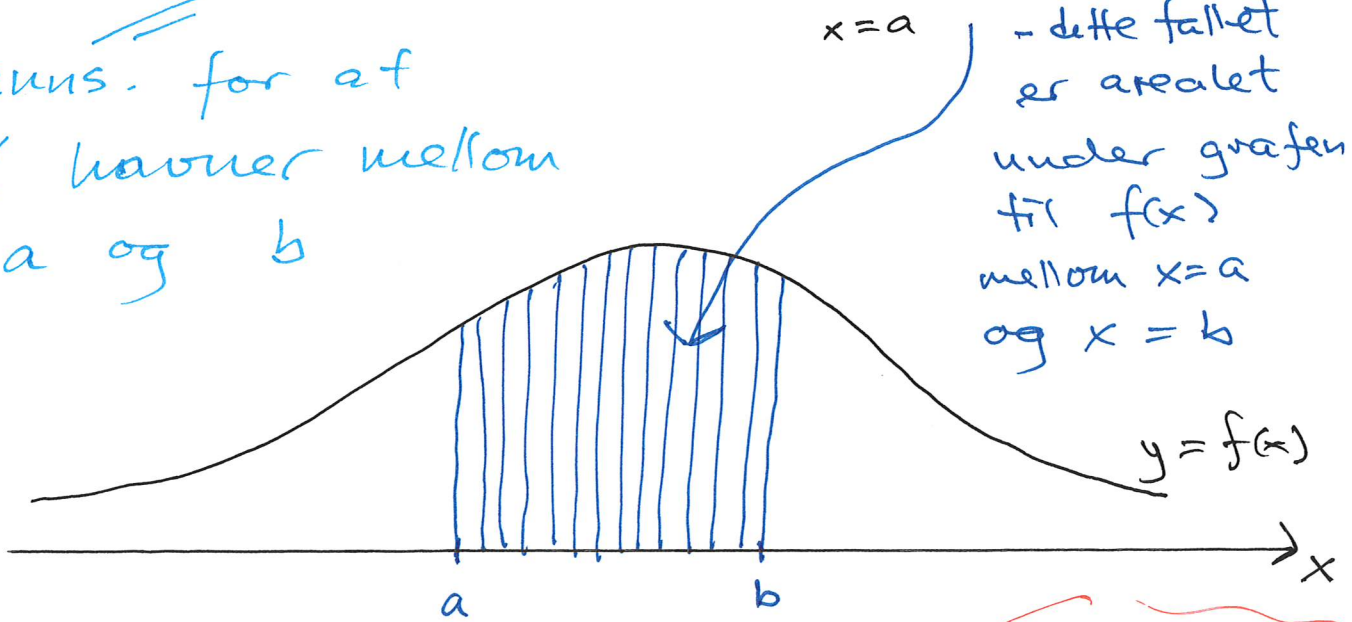
(ett forsøk, to "målinger")

Hvis X er en kont. stok. var. så har X en funksjon $f(x) = f_X(x)$ som kalles sannsynlighetstetthetene til X.

Da skal $$P(a \leq X \leq b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

Sanns. for at X havner mellom a og b

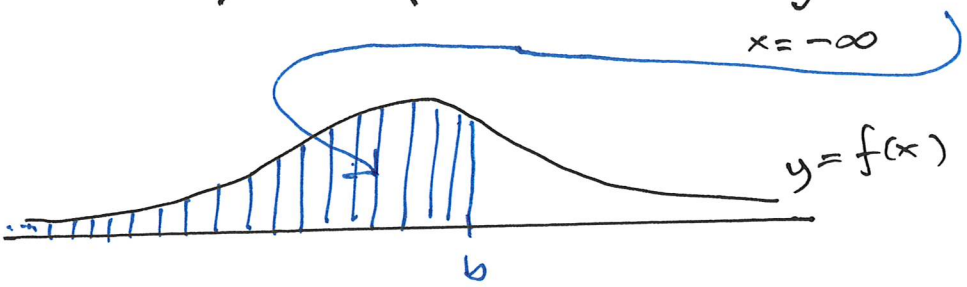
- dette tallet er arealet under grafen til $f(x)$ mellom $x=a$ og $x=b$

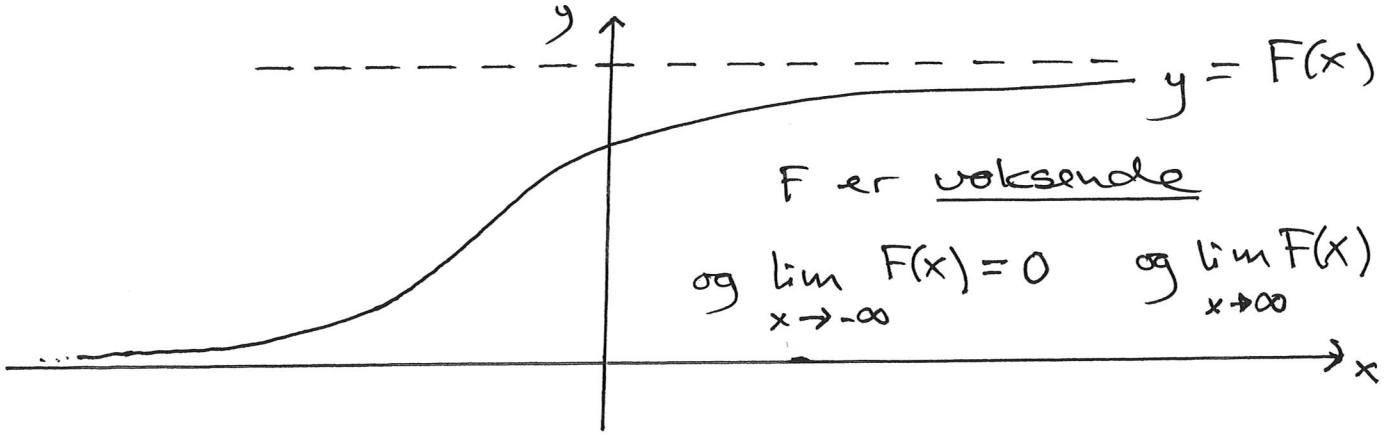


Start: 16.01

Kummulativ fordelingsfunksjon til X

er $F(b) = P(X \leq b) = \int_{x=-\infty}^{x=b} f(x)\,dx$





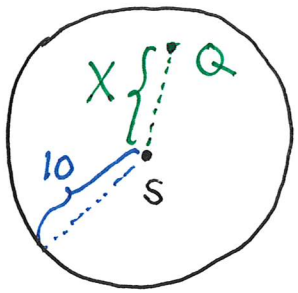
F er voksende

og $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ og $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Eks (kont. stok. var.) – finner $F(x)$ og $f(x)$.

Forsøk Plukk et punkt Q tilfeldig i en sirkelskive med radius 10

Stok. var. X = avstanden fra Q til sentrum av sirkelen, så $X \in [0, 10]$



$F(4) = P(X \leq 4) =$

$= \dfrac{\text{arealet av en sirkel med radius } 4}{\text{arealet av en sirkel med radius } 10}$

$= \dfrac{\pi \cdot 4^2}{\pi \cdot 10^2} = \dfrac{16}{100} = 16\,\%$

$P(4 \leq X \leq 5) = F(5) - F(4) = 25\,\% - 16\,\% = 9\,\%$

Vi får $F(x) = \dfrac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 10^2} = \dfrac{x^2}{100}$ (gjelder $0 \leq x \leq 10$)

egenting:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{x^2}{100} & \text{for } 0 \le x \le 10 \\ 1 & \text{for } x > 10 \end{cases}$$

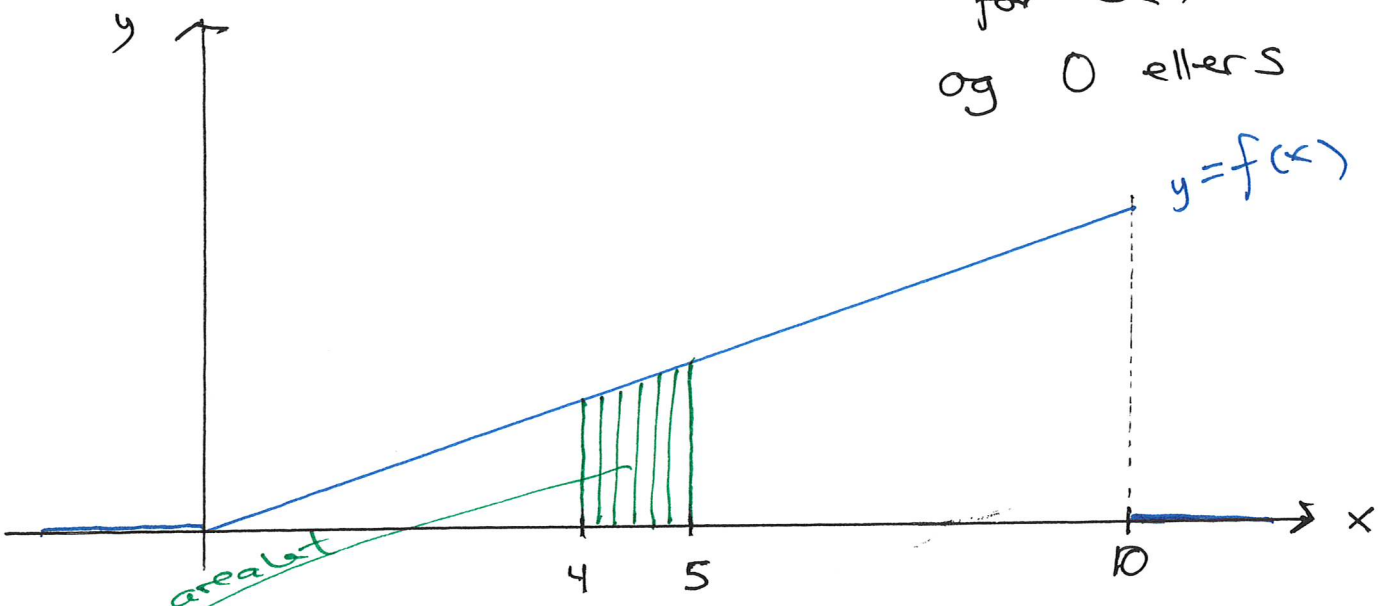
Men hva er tetthetsfunksjonen $f(x)$ til X?

Analysens fundamentalteorem sier at

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^2}{100}\right)' = \frac{2x}{100} = \frac{x}{50}$$

for $0 \le x \le 10$

og 0 ellers



$$P(4 \le X \le 5) = \int_4^5 \frac{x}{50}\,dx = \left[\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{x=4}^{x=5}$$

$$= \frac{1}{50}\left(\frac{1}{2}\cdot 5^2 - \frac{1}{2}\cdot 4^2\right) = \frac{1}{100}(5^2 - 4^2) = \underline{\underline{\frac{9}{100}}}$$

Hvis en funksjon $f(x)$ tilfredsstiller kravene

1) $f(x) \ge 0$ for alle x

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

så er $f(x)$ tetthetsfunksjonen til en kontinuerlig stok. var.

3. Forventning og varians

Anta X er en kont. stok. var. med tetthetsfunksjon $f(x)$.

Definisjon Forventningen $E(X)$ er tallet gitt som

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

"gjennomsnittsverdien til X"

" balansepunktet til tetthetsfunksjonen"

Eks $f(x) = \frac{x}{50}$ for $0 \le x \le 10$ og 0 ellers.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{x}{50}\, dx = \frac{1}{50}\int_{0}^{10} x^2\, dx = \frac{1}{50}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=10}$$

$$= \frac{1}{150}\left(10^3 - 0^3\right) = \frac{1000}{150} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67 .$$

Det magiske resultatet

Anta $h(x)$ er en kontinuerlig funksjon og X er en stok. var. med tetthet $f(x)$.

Da er $Y = h(X)$ en ny stok. var. og

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx$$

Variansen $\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-a)^2\right]$

der $a = E(X) = \mu$ ("my")

Her er $h(x) = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

så $\mathrm{Var}(X) = E(\overbrace{h(X)}^{Y})$

magisk regn. $= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2ax + a^2) \cdot f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - 2a \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx + a^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

magisk regn. $= E(X^2) - 2a \cdot \overbrace{E(X)}^{a} + a^2 \cdot 1$

$= E(X^2) - a^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Resultat: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$