ELE 3719, 8. forelesning, 30. sept. 2025, Runar Ile

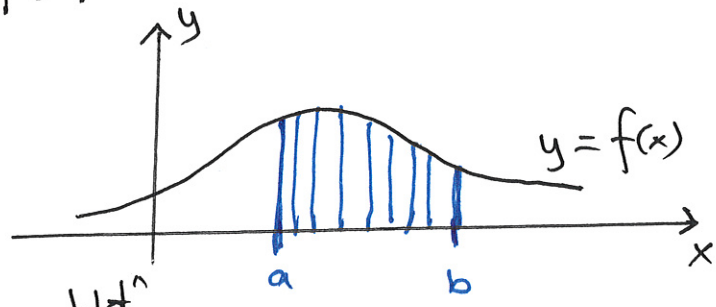
1. Repetisjon
2. Medianen og andre prosentiler (1.5-6)
3. Dobbeltintegraler (2)
4. To simultant fordelte stokastiske variabler (3.1-2)

1. Repetisjon

Forsøk, utfall, X-verdi for utfall

tetthetsfunksjon $f_X(x) = f(x)$

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Forventningsverdien
"gjennomsnittsverdien - tyngdepunktet"
til X

er $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Resultat Hvis $h(x)$ er en funksjon, er $Y = h(X)$ en ny stok. var. (for det samme forsøket)

og $$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\,dx$$

Eks $$Var(X) = E\left[(X-a)^2\right], \quad a = E(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x-a)^2 \cdot f_X(x)}_{\ge 0}\,dx$$

⋮ (regner)

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

resultat

Standardavviket $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

- har samme benevning som X (f.eks. kg)

2. Median og andre prosentiler

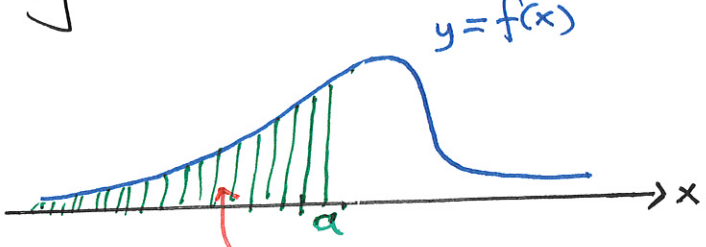
Hva er "midten" av verdiene til X?

$E(X)$ gir "balansepunktet" – "gjennomsnittet"

Definisjon Hvis $P(X \leq a) = 0{,}5$ (et tall) så kalles a for medianen til X. Skriver $m(X) = a$.

Hvis X er kontinuerlig er medianen løsningen på likningen (for a)

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = 0{,}5$$



halvparten av arealet under grafen (= 0,5)

Eks Anta Y er en stok. var. (kont.) med tetthetsfunksjon

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t} & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Medianen til Y er løsningen (for a) til likningen

$$\int_0^a 0{,}2\, e^{-0{,}2t}\,dt = 0{,}5$$

dvs $\left[-e^{-0{,}2t}\right]_{t=0}^{t=a} = 0{,}5$

Substitusjon

$u = -0{,}2t$

$du = (-0{,}2t)' \cdot dt$

$= -0{,}2 \cdot dt$

Så $dt = \frac{1}{-0{,}2} \cdot du$ gir

$\int 0{,}2\, e^{u} \cdot \frac{1}{-0{,}2}\,dt = -\int e^u du = -e^u + C$

dvs $-e^{-0,2a} - (-e^{-0,2\cdot 0}) = 0,5$

$1 - e^{-0,2a} = 0,5$

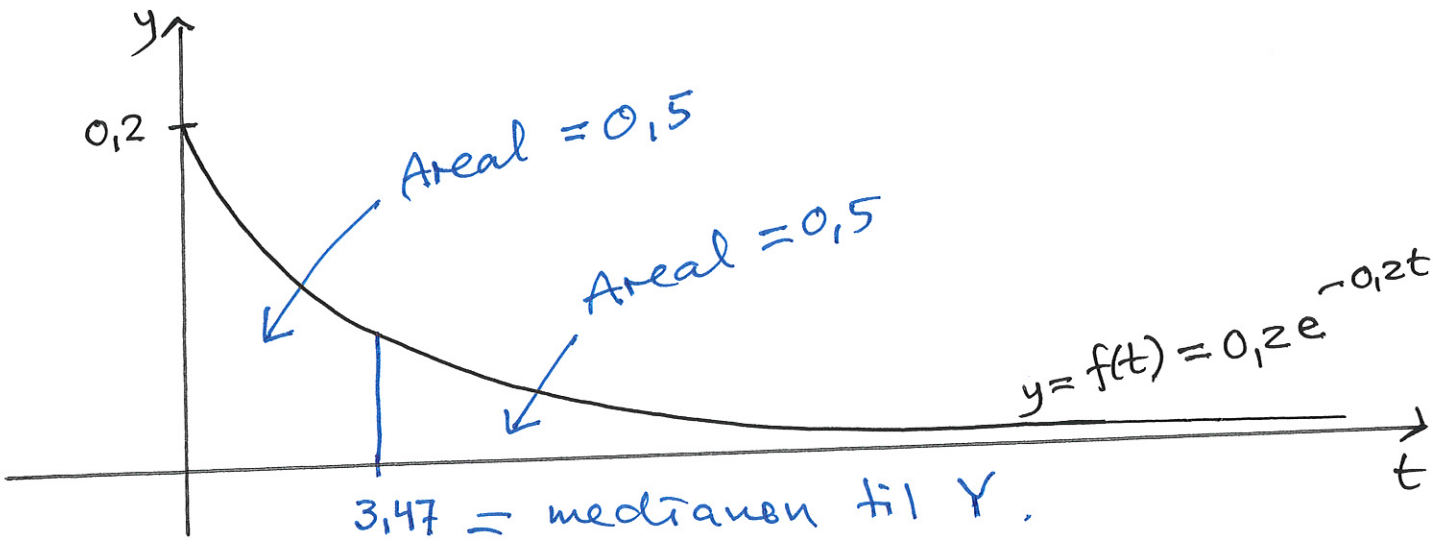
$0,5 = 1 - 0,5 = e^{-0,2a}$

Setter VS og HS inn i $\ln(x)$

$$\ln(0,5) = -0,2a$$

Så $$a = \frac{\ln(0,5)}{-0,2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-0,2} = \frac{\ln(1)-\ln(2)}{-0,2}$$

$$= \frac{\ln(2)}{0,2} = 5\ln(2) \approx \underline{\underline{3,47}}$$



Kan også regne på $E(Y) = \int_0^\infty t \cdot 0,2e^{-0,2t}\,dt$

Delvis integrasjon

$u = t$ og $v' = 0,2e^{-0,2t}$ } gir at $\int \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{0,2e^{-0,2t}}_{v'}\,dt$

$u' = 1$ $\quad v = -e^{-0,2t}$

delvisint. $= t\cdot(-e^{-0,2t}) - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-e^{-0,2t})}_{v}\,dt$

$u \cdot v - u' \cdot v$

$$= -te^{-0,2t} + \frac{1}{-0,2} e^{-0,2t} + C$$

$$= -te^{-0,2t} - 5e^{-0,2t} + C$$

Får $E(Y) = \lim_{t\to\infty} -te^{-0,2t} - 5e^{-0,2t} - \left(0 \cdot e^{-0,2\cdot 0} - 5 \cdot e^{-0,2\cdot 0}\right) = \underline{\underline{5}}$

fordi $\lim_{t\to\infty} -5e^{-0,2t} = \lim_{t\to\infty} \frac{-5}{e^{0,2t}} = 0$

og $\lim_{t\to\infty} -te^{-0,2t} = \lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^{0,2t}} \overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{0,2e^{0,2t}} = 0$

NB: $E(Y) = 5 >$ medianen $= 3,47$

Start: 15.08

Prosentiler

Definisjon Anta X er en stok. var. og at $P(X \leq a) = p\,\%$. Da er a den p-te prosentilen til X.

F. eks. hvis $p = 25$ så er verdiene til X mindre (eller lik) a i 25 % av tilfellene (utfallene) hvis vi gjør mange forsøk.

a-en kalles også første kvartil.

HVIS $p = 50$ er a = medianen (andre kvartil)

Oppg X kont. stok. var. med tetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{for } x \geq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Beregn $E(X)$

b) Beregn medianen $m(X)$

c) Beregn første og tredje kvartil til X.

Løsning a) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=\infty} = 2\left(0 - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \underline{\underline{2}}$$

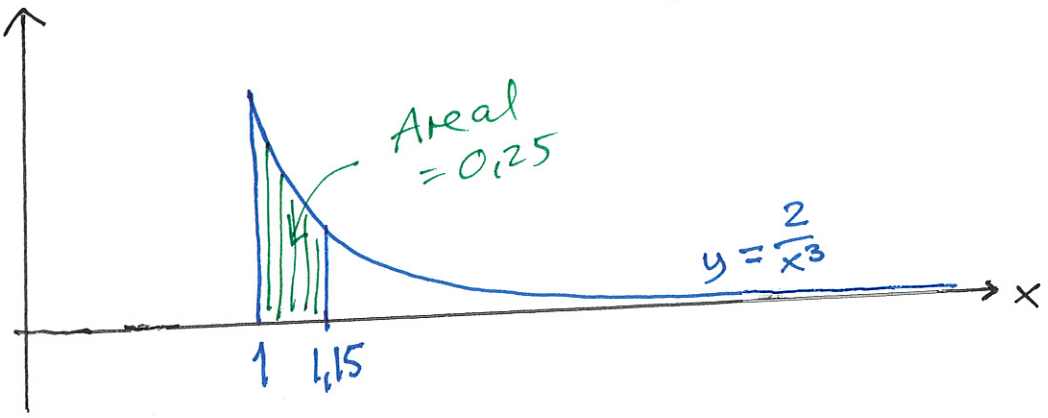
b-c) $$\int_1^a \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{x=1}^{x=a} = -\frac{1}{a^2} - \left(-\frac{1}{1^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{a^2}$$

Første kvartil løser likningen $1 - \frac{1}{a^2} = 0{,}25$

dvs $0{,}75 = \frac{1}{a^2}$ dvs $a^2 = \frac{1}{0{,}75} = \frac{1}{(\frac{3}{4})} = \frac{4}{3}$

Så $a \overset{(a>1)}{=} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$



Medianen løser likningen $1 - \frac{1}{a^2} = 0{,}5$

som gir $a = \sqrt{2}$ (fordi $a > 1$)

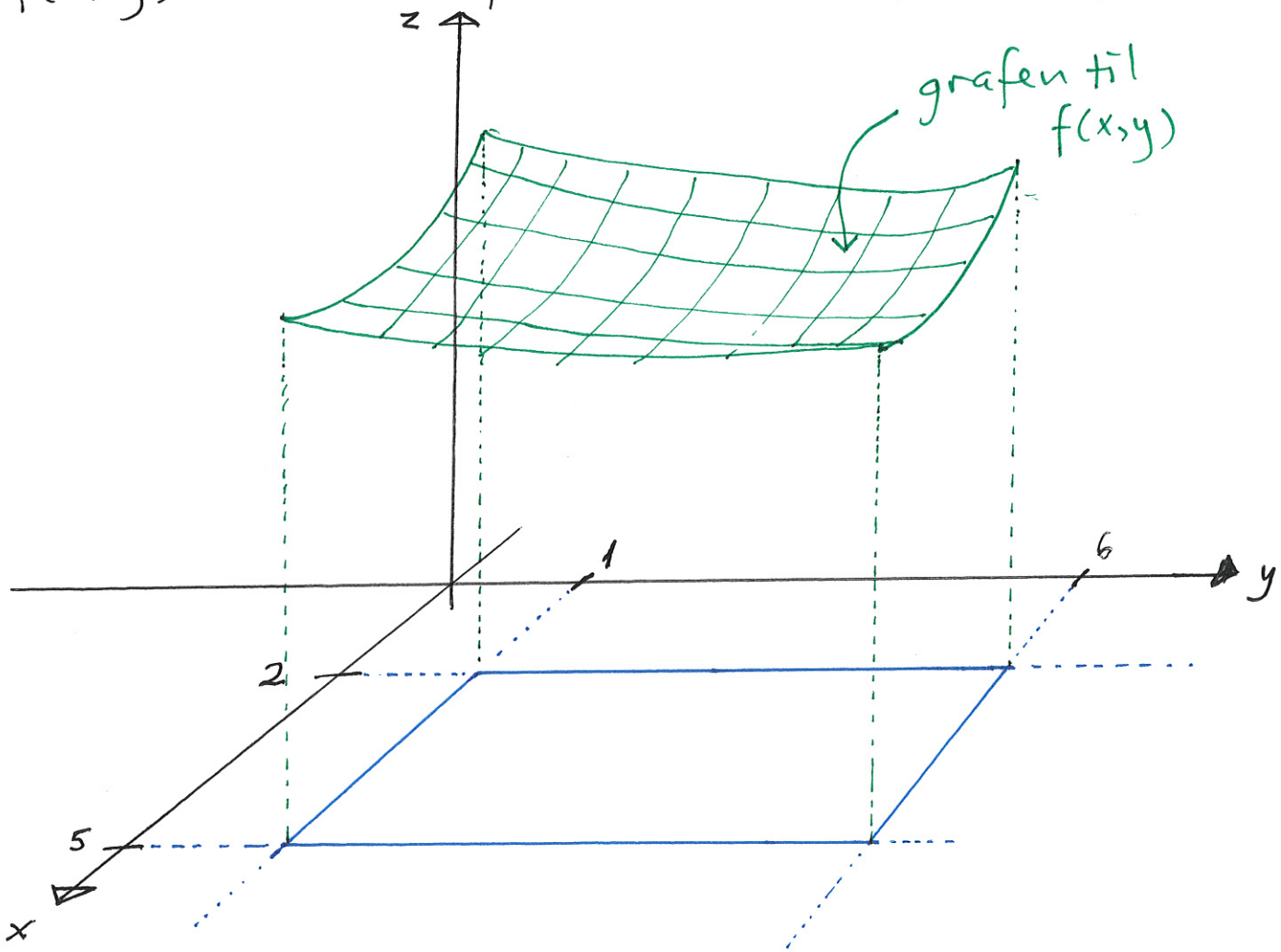
$\approx 1{,}41$

Tredje kvartil løser likn. $1 - \frac{1}{a^2} = 0{,}75$

som gir $a = 2$ (fordi $a > 1$)

---

3. Dobbeltintegraler Grafen til en funksjon $f(x, y)$ er alle punkter $(x, y, f(x,y))$



Hva er volumet under grafen?

- Det er $\int_{y=1}^{y=6} \int_{x=2}^{x=5} f(x,y)\, dx\, dy$

Regner først det innerste integralet

$\int_2^5 f(x,y)\,dx$ som et vanlig enkel fintegral hvor y er en ubestemt konstant.

Så hvis $G(x,y)$ er sånn at $G(x,y)'_x = f(x,y)$

så er $\int_2^5 f(x,y)\,dx = \underbrace{G(5,y) - G(2,y)}_{\text{en funksjon av } y}$

Så integrerer vi denne funksjonen:

$\int_1^6 G(5,y) - G(2,y)\,dy$ og dette tallet er volumet.

Start: 16.00

Eks $f(x,y) = 4xy + 3y + 1$. Da er

$\int f(x,y)\,dx = 4y \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3y \cdot x + x + C(y)$

Så $\int_2^5 f(x,y)\,dx = 4y \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 + 3y \cdot 5 + 5 - \left(4y \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot y \cdot 2 + 2\right)$

$= 50y + 15y + 5 - 8y - 6y - 2$

$= 51y + 3 \quad (= G(5,y) - G(2,y))$

Da er $\int_1^6 51y + 3\,dy = \left[\frac{51}{2}y^2 + 3y\right]_{y=1}^{y=6}$

$= \frac{51}{2} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 - \left(\frac{51}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) = \frac{1815}{2} = \underline{\underline{907{,}5}}$

$= \int_{y=1}^{y=6} \int_{x=2}^{x=5} 4xy + 3y + 1 \; dx\,dy$

NB: Kan også integrere y først, deretter x

– gir samme svar:

$$\int_1^6 4xy + 3y + 1 \, dy = \left[2xy^2 + \frac{3}{2}y^2 + y \right]_{y=1}^{y=6}$$

regner $70x + 57{,}5$

$$\int_2^5 70x + 57{,}5 \, dx = \left[35x^2 + 57{,}5x \right]_{x=2}^{x=5}$$

regner 907,5

---

4. To simultant fordelte stokastiske variabler

Ett forsøk: Trekker en laks opp av en mær.

To stok. var: X = vekten av laksen (i kg)

Y = omkretsen av laksen (i cm)

Mulig spørsmål:

Hva er $P(2{,}9 \leq X \leq 3{,}1$ „og" $40 \leq Y \leq 50)$?

Svar:

$$\int_{y=40}^{y=50} \int_{x=2{,}9}^{x=3{,}1} f(x,y) \, dx \, dy$$ hvor

$f(x,y)$ er den simultane sannsynlighetstetthetene til X og Y.

Eks $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{for } 0 \le x \le 1 \text{ og } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$

Dette er en simultan tetthetsfunksjon.

To krav:

① $f(x,y) \ge 0$ for alle x og y

– ok fordi $x+y \ge 0$ hvis $x \ge 0$ og $y \ge 0$

② Den totale sannsynligheten er 1:

$$\int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1} \left[\int_{x=0}^{x=1} x+y \; dx \right] dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(\left[\tfrac{1}{2}x^2 + xy \right]_{x=0}^{x=1} \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\tfrac{1}{2} + y \right) dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 0 = 1 \quad \text{– så ok.}$$

Konkl: $f(x,y)$ er en simultan sanns. tetthet.