| | Emne | Kompendium |
|---|---|---|
| 1 | Repetisjon og oppgaveregning | |
| 2 | Første ordens lineære differensiallikninger | [E] 7.5 |
| 3 | Superposisjonsprinsippet | [E] 7.6 |

| Oppgaver for Forelesning 12 | |
|---|---|
| Oppgaver fra arbeidsboken | [DA] 12.1 - 12.6 |
| Oppgaver fra kompendiet | [E] 7.15 - 7.16, 7.17bc, 7.18 - 7.19 |

## (1) Repetisjon:

Separabel diff.-ligning: $y' = f(t) \cdot g(y)$

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(t)$$

$$\int \frac{1}{g(y)} \underbrace{y'\,dt}_{dy} = \int f(t)\,dt$$

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt}$$

## (2) Første ordens lineære diff. ligninger

**Def:** En diff.-ligning av første orden er **lineær** hvis den kan skrives på formen

$$\boxed{y' + a(t) \cdot y = b(t)} \iff y' = b(t) - a(t) \cdot y$$

Eks: (1) $y' = 3y = 3 \cdot y$ separabel

$y' - 3y = 0$ lineær $a(t) = -3$ $b(t) = 0$

(2) $y' = t - y$ ikke separabel

$y' + y = t$ lineær $a(t) = 1$ $b(t) = t$

(3) $y' - t^2 y = t^3$ lineær $a(t) = -t^2$ $b(t) = t^3$

$y' = t^2 y + t^3$ ikke sep.

Løsningsmetode: Lineære første ordens

$y' + a(t)y = b(t) \quad | \cdot u(t)$

$u(t) \cdot y' + u(t) \cdot a(t) \cdot y = b(t) \cdot u(t)$

$u(t) \cdot y' + u'(t) \cdot y = b(t) \cdot u(t)$

$(u(t) \cdot y)' = b(t) \cdot u(t)$

$\int (u(t) \cdot y)' \, dt = \int b(t) u(t) \, dt$

$u(t) \cdot y = \int b(t) u(t) \, dt$

$$y = \frac{1}{u(t)} \int b(t) u(t) \, dt$$

Krav: $u'(t) = u(t) \cdot a(t)$

$u' = u \cdot a(t) \quad | : u$

$\frac{1}{u} u' = a(t)$

$\int \frac{1}{u} \frac{u'}{du} dt = \int a(t) \, dt$

$\int \frac{1}{u} \, du = \int a(t) \, dt$

$e^{\ln|u|} = e^{\int a(t) dt}$

$|u| = e^{\int a(t) dt}$

$$u = e^{\int a(t) dt}$$

$u(t)$: 'integrerende faktor'

$$u(t) = e^{\int a(t) dt}$$

**Eks:** $y' = 3y$

$a(t) = -3$

$b(t) = 0$

**Int. faktor:**

$\int a(t)\,dt = \int -3\,dt$

$= -3t + C$ ← $C = 0$

$\cdot e^{-3t} \mid \; y' - 3y = 0$

$u = e^{-3t}$ int. faktor

$e^{-3t} \mid e^{-3t} y' - 3e^{-3t} \cdot y = 0 \cdot e^{-3t}$

$(e^{-3t} \cdot y)' = 0$

$e^{-3t} \cdot y = C \mid \cdot e^{3t} \Rightarrow y = \underline{Ce^{3t}}$

**Eks:** $y' = t - y$

$a(t) = 1$

$b(t) = t$

$\int a(t)\,dt = \int 1\,dt = t + C$

$u(t) = e^t$

$y' + y = t \mid \cdot e^t$

$(y \cdot e^t)' = te^t$

$y \cdot e^t = \int te^t\,dt = te^t - \int e^t \cdot 1\,dt = te^t - \int e^t\,dt$

$u = e^t \quad v = t$

$u' = e^t \quad v' = 1$

$\frac{ye^t}{e^t} = \frac{te^t - e^t + C}{e^t}$

$y = \underline{t - 1 + Ce^{-t}}$

**Eks:** $\frac{ty'}{t} = \frac{t - y}{t} \mid :t$

$y' = 1 - \frac{y}{t}$

$a(t) = 1/t$

$\int a(t)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C$

$y' + \frac{1}{t} \cdot y = 1 \mid \cdot t$

$b(t) = 1$

$u = e^{\ln|t|} = |t| = \underline{t}$

$ty' + y = t$

$(t \cdot y)' = t$

$\frac{ty}{t} = \frac{\frac{1}{2}t^2 + C}{t}$

$y = \underline{\frac{1}{2}t + \frac{C}{t}}$

Eks: $y' + ay = b \quad | \cdot e^{at}$ a, b konstanter

$(y \cdot e^{at})' = be^{at}$ $\int a\,dt = at + C$ $u = e^{at}$

$y \cdot e^{at} = \int be^{at}\,dt = b\int e^{at}\,dt = b \cdot \int e^{v} \frac{1}{a}\,dv$

$v = at$
$dv = a\,dt$

$$\frac{y \cdot e^{at}}{e^{at}} = \frac{\frac{b}{a}e^{v} + C}{e^{at}} = \frac{\frac{b}{a}e^{at} + C}{e^{at}}$$

$$y = \frac{b}{a} + \frac{C}{e^{at}} = \frac{b}{a} + C \cdot e^{-at} \qquad (a \neq 0)$$

## (3) Superposisjonsprinsippet

Når vi skal løse differensiallikn. $y' + a(t)y = b(t)$,
så er den generelle løsn $y = y_h + y_p$, der

$y_h$: generell løsn. av den homogene diff.likn. $y' + a(t) \cdot y = 0$

$y_p$: en spesiell løsn. av $y' + a(t) \cdot y = b(t)$.

Eks: $y' - 3y = 2e^{4t}$ $y = y_h + y_p = C \cdot e^{3t} + 2e^{4t}$

$y_h$: $y' - 3y = 0$

$y' = 3y$

$\frac{1}{y}y' = 3$ → $\ln|y| = 3t + C$

$|y| = e^{3t+C} = e^{3t} \cdot e^{C}$

$y = \pm e^{C} \cdot e^{3t} = K \cdot e^{3t}$ } $y_h = K \cdot e^{3t}$

$y' - ay = 0 \rightarrow y_h = Ke^{at}$

Karakteristisk likn: $y' + ay = 0$

$r + a \cdot 1 = 0 \quad r = -a$ → $y_h = C \cdot e^{-at}$

$y_p$: $y' - 3y = 2e^{4t}$

$(4Ae^{4t}) - 3(Ae^{4t}) = 2e^{4t}$

$A \cdot e^{4t} = 2 \cdot e^{4t}$

$A = 2$

$\begin{cases} y = Ae^{4t} \\ y' = A \cdot e^{4t} \cdot 4 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p = 2e^{4t}$

Kontr.: $y' - 3y = 2e^{4t}$ har generell løsn.

$y = \underline{C \cdot e^{3t} + 2e^{4t}}$

Int. faktor: $a(t) = -3$

$\int a(t)\,dt = -3t + C \rightarrow u = e^{-3t}$

$y' - 3y = 2e^{4t} \quad | \cdot e^{-3t}$

$(y \cdot e^{-3t})' = 2e^{4t-3t} = 2e^{t}$

$y \cdot e^{-3t} = \int 2e^{t}\,dt = 2e^{t} + C$

$y = \frac{2e^{t} + C}{e^{-3t}} = 2e^{4t} + \frac{C}{e^{-3t}} = 2e^{4t} + C \cdot e^{3t}$

Forklaring:

1) Karakteristisk likn: $y' + ay = 0$

Anta at vi har en løsn. på form $y = e^{rt}$. Da har vi:

$\begin{cases} y = e^{rt} \\ y' = r \cdot e^{rt} \end{cases}$ $\Rightarrow r \cdot e^{rt} + a \cdot e^{rt} = 0$

$(r+a) \cdot e^{rt} = 0 \quad | : e^{rt}$

$\boxed{r + a = 0}$ ← Kar. likn.

$r = -a$

$\Rightarrow y_h = C \cdot e^{-at}$

første ordens lineær homogen med konstant $a(t) = a$

2) Superposisjon: $\boxed{y = y_h + y_p}$

$y' + a(t) \cdot y = b(t)$

$D(y) = y' + a(t) \cdot y$ differensialoperator

Fakta: i) $D(y_1 + y_2) = D(y_1) + D(y_2)$
ii) $D(c \cdot y) = c \cdot D(y)$
} lineær differensial-operator

$D(y) = y' + a(t)y$ er lineær fordi

i) $D(y_1+y_2) = (y_1+y_2)' + a(t) \cdot (y_1+y_2)$
$= y_1' + y_2' + a(t) \cdot y_1 + a(t) y_2$
$= y_1' + a(t) y_1 + y_2' + a(t) y_2$
$= D(y_1) + D(y_2)$ vok

ii) $D(c \cdot y) = (cy)' + a(t) \cdot (cy)$
$= c \cdot y' + a(t) \cdot c \cdot y = c \cdot (D_1(y))$ vok.

Hvorfor er $y = y_h + y_p$?

i) $D(y_h + y_p) = D(y_h) + D(y_p) = 0 + b(t) = b(t)$
$\Rightarrow$ $y_h + y_p$ gir løsn. av diff.likninger

ii) Anta $y$ er løsn. Da er $D(y) = b(t)$, og
$D(y - y_h) = D(y) - D(y_h) = b(t) - 0 = b(t)$
$\Rightarrow$ $y - y_h$ er en spesiell løsn., dvs $y_p$

$y - y_h = y_p$ $y = y_h + y_p$.

Eks: $y' - 2y = 6$

Superposisjon: $y = y_h + y_p = Ce^{2t} + (-3) = \underline{\underline{Ce^{2t} - 3}}$

$y_h$: $y' - 2y = 0$

$r - 2 = 0 \quad r = 2 \quad y_h = Ce^{2t}$

$y_p$: $y' - 2y = 6$ $\quad y = A$, $y' = 0$

$0 - 2A = 6$

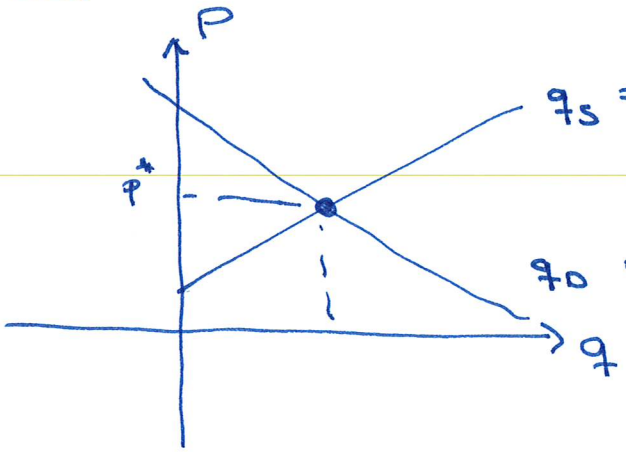
$A = -3$

$y_p = -3$

Eks: $y' + ay = b \quad (a \neq 0)$

$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C \cdot e^{-at} + \frac{b}{a}}}$

Eks:




Hva skjer når $t \to \infty$

$p(t) \to \frac{\alpha - a}{\beta + b}$

$a + bp = \alpha - \beta p$

$bp + \beta p = \alpha - a$

$p^* = \frac{\alpha - a}{b + \beta}$

$p' = k(q_D - q_S) = k \cdot \left( (\alpha - \beta p) - (a + bp) \right)$

$p' = k(\alpha - a - (\beta + b)p)$

$p' + k(\beta + b)p = k(\alpha - a)$

$p = \frac{k(\alpha - a)}{k(\beta + b)} + Ce^{-k(\beta + b)t}$

Eks: $y' + 2ty = 4t$

y) $y' = 2t(2-y) \quad | : (2-y)$

$\frac{1}{2-y} y' = 2t$

$\int \frac{1}{2-y}\, dy = \int 2t\, dt$

$-\ln|2-y| = t^2 + C$

$\ln|2-y| = -t^2 - C$

$|2-y| = e^{-t^2-C}$

$2-y = \pm e^{-C} \cdot e^{-t^2} = Ke^{-t^2}$

$2 = y + Ke^{-t^2}$

$y = \underbrace{2}_{y_p} \underbrace{- Ke^{-t^2}}_{y_h}$

1) $y' = 4t - 2ty$

$= 2t(2-y)$

2) int. faktor

(3) Kan i prinsippet bruke superposisjon, her ville kar. likn.)

2) $y' + 2ty = 4t \quad | \cdot u = e^{t^2}$

$(y \cdot e^{t^2})' = 4te^{t^2}$

$y \cdot e^{t^2} = \int 4te^{t^2} dt$

$u = t^2$, $du = 2t\,dt$

$= \int 4te^{u} \cdot \frac{du}{2t}$

$= \int 2e^u\, du$

$= 2e^u + C$

$\frac{ye^{t^2}}{e^{t^2}} = \frac{2e^{t^2} + C}{e^{t^2}}$

$y = 2 + Ce^{-t^2}$

Eks: $(t^2+1)y' + 2ty = 1 \quad | : (t^2+1)$

$(t^2+1)\cdot \Big| \quad y' + \frac{2t}{t^2+1} y = \frac{1}{t^2+1}$

$a(t) = \frac{2t}{t^2+1}$

$(t^2+1)y' + 2ty = 1$

$\left((t^2+1)\cdot y\right)' = 1$

$(t^2+1)\cdot y = \int 1\,dt = t + C$

$y = \frac{t+C}{t^2+1}$

$\int a(t)\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt$

$\Big| \begin{matrix} u = t^2+1 \\ du = 2t\,dt \end{matrix} \Big|$

$= \int \frac{2t}{u} \frac{du}{2t} = \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + C = \ln(t^2+1) + C$

$V = e^{\ln(t^2+1)} = t^2+1$