	Emne	Kompendium
1	Repetisjon og oppgaveregning	
2	Optimal kontrollteori	[DA] 15

Oppgaver for Forelesning 15	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 15.1 - 15.7
Eksamensoppgaver	Eksamen 05/2022 Oppg 4-5

Rep forelesning 7. mai 09-12 A1-030 (Eksamen 05-2025)
Eksamen 11. mai 09-14 E

① Repetisjon: Variasjons problem

$$\max/\min \int_a^b F(t,y,y')\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Euler: $F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{y'}) = 0$ (nødvendig betingelse)
(tilstrekkelig ")

Kandidat: $H_F = \begin{pmatrix} F''_{yy} & F''_{yy'} \\ F''_{y'y} & F''_{y'y'} \end{pmatrix}$

$\det H_F = AC - B^2 \geq 0$, $A, C \geq 0$ $\Rightarrow$ $y^*(t)$ min

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$\det H_F = AC - B^2 \geq 0$, $A, C \leq 0$ $\Rightarrow$ $y^*(t)$ max

$y^*(t)$: løsn. av Euler + start/slutt betingelsene

Eks: $\max \int_0^T \ln(2K-K')\, e^{-t/4}\, dt$ når $\begin{cases} K(0) = K_0 \\ K(T) = K_T \end{cases}$

$F = \ln(2K-K')\, e^{-t/4}$

$F'_K = \frac{1}{2K-K'} \cdot 2 \cdot e^{-t/4} = \frac{2}{2K-K'} \cdot e^{-t/4}$

$F'_{K'} = \frac{1}{2K-K'} \cdot (-1) \cdot e^{-t/4} = \frac{-1}{2K-K'} e^{-t/4}$ $\quad (-1)\cdot(2K-K')^{-1}$

$\frac{d}{dt}\left(F'_{K'}\right) = \frac{-1}{2K-K'} \cdot e^{-t/4} \cdot (-1/4) + e^{-t/4} \cdot \left(\frac{1}{(2K-K')^2} \cdot (2K'-K'')\right)$

$= \frac{e^{-t/4}}{(2K-K')^2} \cdot \left[\tfrac{1}{4}(2K-K') + 2K' - K''\right]$

Euler: $\frac{2(2K-K')}{(2K-K')^2} \cdot e^{-t/4} - \frac{e^{-t/4}}{(2K-K')^2}\left(\frac{1}{2}K + \frac{7}{4}K' - K''\right) = 0$

$\frac{e^{-t/4}}{(2K-K')^2} \cdot \left[(4K - 2K') - \left(\frac{1}{2}K + \frac{7}{4}K' - K''\right)\right] = 0$

$K'' - \frac{15}{4}K' + \frac{7}{2}K = 0$

Kar.likn: $r^2 - \frac{15}{4}r + \frac{7}{2} = 0$

$r = \frac{15/4 \pm \sqrt{(15/4)^2 - 4(7/2)}}{2}$

$K^*(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{7/4\, t}$

$\Delta = \frac{225}{16} - \frac{28 \cdot 8}{2 \cdot 8} = \frac{1}{16}$

$r = \frac{15/4 \pm 1/4}{2} = 2,\ 7/4$

$H_F = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t/4} / (2K-K')^2$

$\left(\frac{2}{2K-K'}\right)'_K = 2 \cdot (-1) \cdot (2K-K')^{-2} \cdot 2$

$\left(\frac{2}{2K-K'}\right)'_{K'} = 2(-1)(2K-K')^{-2} \cdot (-1)$

$\left(\frac{-1}{2K-K'}\right)'_{K'} = -1(-1)(2K-K')^{-2} \cdot (-1)$

$\det H_F = 0 \cdot \left(\frac{e^{-t/4}}{(2K-K')^2}\right)^2 = 0 \geq 0$ ok

$\frac{-4e^{-t/4}}{(2K-K')^2}$ $\quad \frac{-1 \cdot e^{-t/4}}{(2K-K')^2} \leq 0$ ok fermat

Formelark

Matrisemetoder

Partiell derivasjon

Den kvadratiske funksjonen f i n variabler

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} + B\,\mathbf{x} + C$$

der A er en symmetrisk $n \times n$-matrise, B er en $1 \times n$-matrise og C er en 1×1-matrise har de n partiellderiverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\,\mathbf{x} + B^T$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v\,\mathrm{d}t = uv - \int uv'\,\mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u'\,\mathrm{d}t = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{pt+q}{(t-a)(t-b)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b}\right)\,\mathrm{d}t$$

Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning

Variasjonsproblemet gitt ved

$$\max / \min \int_a^b F(t,y,y')\,\mathrm{d}t$$

med betingelsene

$$\begin{cases} y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{cases}$$

har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F'_{y'}\right) = 0$$

Optimal kontrollteori

Kontrollproblemet gitt ved

$$\max / \min \int_a^b F(t,y,u)\,\mathrm{d}t$$

med betingelsene

$$\begin{cases} y'(t) &= G(t,y,u) \\ y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{cases}$$

har Hamiltonfunksjonen

$$H(t,y,u,p) = p_0\,F(t,y,u) + p(t)\,G(t,y,u)$$

og første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u &= 0 \\ H'_y &= -p'(t) \end{cases}$$

med $p_0 = 1$ (normalløsningen) eller $p_0 = 0$ og $p(t) \neq 0$ (degenerert løsning)

(2) Optimal Kontrollteori

$$\max/\min \int_a^b F(t,y,u)\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y' = 6(t,y,u) \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

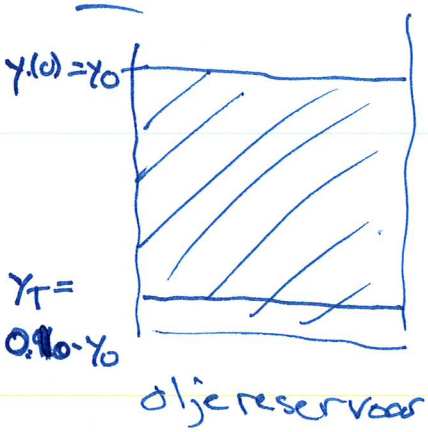
$y(t)$: tilstandsvariabel
$u(t)$: kontrollvariabel

Merk: Hvis $y' = u$ $\quad [6(t,y,u) = u]$ spesialtilfelle

$$\Rightarrow \max/\min \int_a^b F(t,y,y')\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Variasjonsproblem

Eks:



$y(t)$: mengden olje $\quad u(t) = -y'(t)$

$$\max \int_0^T u(t)\cdot p(t) - c(t,y,u)\,dt$$

$y(0) = y_0$
$y(T) = \frac{y_0}{10}$

Eks: $\max \int_0^1 \underbrace{y - u^2}_{F(t,y,u)}\,dt$ når $\underbrace{y' = y + u}_{6(t,y,u)}$, $y(0) = 1$, $y(1) = e - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$

Alt I: Gjør om til variasjonsproblem $\quad y' = y + u \Rightarrow u = y' - y$

$$\Rightarrow \max \int_0^1 y - (y'-y)^2\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = \ldots \end{cases}$$

$F = y - (y'-y)^2$

$F'_y = 1 - 2(y'-y)\cdot(-1) = 1 + 2(y'-y)$

$F'_{y'} = -2(y'-y)\cdot 1 = -2(y'-y)$ $\quad \frac{d}{dt}(F'_{y'}) = -2(y'' - y')$

Euler: $1 + 2(y'-y) + 2(y''-y') = 0$

$2y'' - 2y = -1 \quad 1:2$

$y'' - y = -1/2$

$y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 1/2$

y_h: $r^2 - 1 = 0 \quad r = \pm 1 \quad y_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

y_p: $y'' - y = -1/2$ ← $\begin{cases} y = A \\ y' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$

$0 - A = -1/2$

$A = 1/2 \qquad y_p = 1/2$

$y(0) = 1$: $C_1 + C_2 + 1/2 = 1 \qquad C_1 + C_2 = 1/2$

$y(1) = e - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$: $C_1 \cdot e + C_2 \cdot e^{-1} + 1/2 = e - \frac{1}{2e} + 1/2$

$eC_1 + \frac{1}{e}C_2 = e - \frac{1}{2e}$

$C_2 = \frac{1}{2} - C_1$: $eC_1 + \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2} - C_1\right) = e - \frac{1}{2e}$

$C_1 \cdot (e - 1/e) = e - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} = e - \frac{1}{e}$

$C_1 = \frac{e - 1/e}{e - 1/e}$

$C_1 = 1 \qquad C_2 = -1/2$

$y^*(t) = e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1/2$ max

$F'_y = 1 + 2(y' - y)$

$F'_{y'} = -2(y' - y)$

$y' = e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$

$H(F) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\det = 0 \geq 0$ ok. $-2, -2 \leq 0$ ok max

$u^* = \left(e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\right) - \left(e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1/2\right) = e^{-t} - 1/2$

Alt. 2 Bruke Hamilton-fn og Pontryagin-betingelsene

$$\max \int_0^1 \underbrace{y-u^2}_{F(t,y,u)}\,dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y' = \overbrace{y+u}^{G(t,y,u)} \\ y(0)=1 \\ y(1) = e - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Metode: $H(t,y,u,p) = p_0 F(t,y,u) + p(t)\cdot G(t,y,u)$

Hamilton-funksjonen

Pontryagin's førsteordensbetingelser:

(1) $H'_u = 0$

(2) $H'_y = -p'$

$$+ \quad \begin{cases} y' = G(t,y,u) \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Løsning av disse betingelsene $\Rightarrow$ kandidater for max/min i kontrollproblemet

Normalløsning: $p_0 = 1$

Degenerert løsn: $p_0 = 0$, $p(t) \neq 0$

I eks: Normalløsning med $p_0 = 1$

$$H = F + p\cdot G = y - u^2 + p\cdot(y+u)$$

(1) $H'_u = 0$: $-2u + p\cdot 1 = 0$ $\quad p = 2u$

(2) $H'_y = -p'$: $1 + p\cdot 1 = -p'$ $\quad p' + p = -1$

(3) $y' = y+u$: $\quad y' - y = u$

i) $p' + p = -1$: $p = p_h + p_p$

p_h: $r+1=0$ $\quad r=-1$ $\quad p_h = C\cdot e^{-t}$

p_p: $p'+p=-1$ $\quad p = A$ $\quad p'=0$ $\quad A=-1$ $\quad p_p = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(t) = C\cdot e^{-t} - 1 \\ u(t) = \frac{C}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

ii) $y' - y = \frac{c}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}$

$y = y_h + y_p = De^t - \frac{c}{4}e^{-t} + 1/2$

y_h: $y' - y = 0$

$r - 1 = 0 \quad r = 1 \quad y_h = De^t$

y_p: $y' - y = \frac{c}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}$ $\Big\{ y = Ae^{-t} + B,\ y' = -Ae^{-t}$

$-Ae^{-t} - (Ae^{-t} + B) = \frac{c}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}$

$-2A \cdot e^{-t} - B = \frac{c}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}$

$-2A = \frac{c}{2} \quad B = 1/2$ $\Big\} \ y_p = -\frac{c}{4}e^{-t} + 1/2$

Løsn: $y(t) = Dc^t - \frac{c}{4}e^{-t} + 1/2$

$u(t) = \frac{c}{2}e^{-t} - 1/2$

$p(t) = Ce^{-t} - 1$

$\Downarrow$

$y^*(t) = e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1/2$

$u^*(t) = e^{-t} - 1/2$

Start/sluttbetingelser:

$D = 1 \quad -\frac{c}{4} = -\frac{1}{2}$

$C = 2$

Alt: $H'_u = 0$: $-2u + p = 0$ $\quad 2u = p \Rightarrow p' = 2u'$

$H'_y = -p'$: $1 + p = -p'$ $\quad p' + p = -1 \Rightarrow 2u' + 2u = -1$

$y' = y + u$: $y' = y + u \Rightarrow u = y' - y$ $\quad u' + u = -1/2$

$\Downarrow$ $\quad u' = -1/2 - u$

$$y'' = y' + u' = y' - u - 1/2 = y' - (y' - y) - 1/2$$

$$y'' = y - 1/2$$

$$\boxed{y'' - y = -1/2} \leftarrow \text{Eulerligningen}$$

Konkl: Normalløsningen er $\begin{cases} y^*(t) = e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1/2 \\ u^*(t) = e^{-t} - 1/2 \end{cases}$ max

Sjekk: Degenerert løsning med $p_0 = 0$ og $p(t) \neq 0$

$H = p_0 \cdot (y - u^2) + p \cdot (y + u)$

$= p(y + u)$

(!) $H'_u = p = 0$ umulig

$\Rightarrow$ ingen degenerert løsn.

Konkavitet:

$$H(H) = \begin{pmatrix} H''_{yy} & H''_{yu} \\ H''_{uy} & H''_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det = AC - B^2 = 0 \geq 0$ ok

$A|C| = 0, -2 \leq 0$ ok max

$H'_y = 1 + p$ $\quad H''_{yy} = 0$ $\quad H''_{yu} = 0$

$H'_u = -2u + p$ $\quad = 0$ $\quad H''_{uu} = -2$