	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Lineær uavhengighet og basis	[E] 2.6 - 2.7 (til Column space ...)
3	Vektorlikninger og lineære systemer	[E] 1.1 - 1.5
4	Rang og homogene systemer	[E] 1.6

Oppgaver for Forelesning 2	Drop-in: 12-14 i B2-020
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 2.1 - 2.14
Oppgaver fra læreboken	[E] 1.1 - 1.8, 2.11, 2.13

(1) Repetisjon:

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ n-vektorer

lin. komb: $c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + c_r \underline{v}_r$

span: $\text{span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r)$ = mengden av alle lin. komb. $\subseteq \mathbb{R}^n$

lin. uavh: vektorene kalles lin. avhengige hvis minst én er en lin. komb. av de andre, lin. uavhengige ellers

Indreprodukt:

$\underline{v}, \underline{w}$ n-vektorer

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$$

$\underline{v} \perp \underline{w}$ (ortogonale) $\iff \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

(2) Lineær uavhengighet og basis

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

Defn. $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r)$ kalles **vektorrommet** utspent av vektorene $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$.

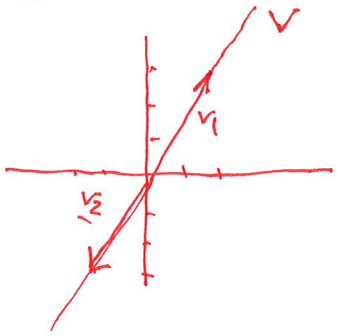
Vektorene er **lineært uavhengige** hvis ingen av vektorene kan skrives som en lin. komb. av de andre

Defn La $V = \text{span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r)$. Da er $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ en **basis** for V hvis vektorene er lineært uavhengige

Eks:

$V = \text{span}(\underline{v}_1)$ $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1$ er en basis for V



$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\text{span}(\underline{v}_2) = V$

$\underline{v}_2$ er en basis for V

Resultat: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ n-vektorer

Se på vektorligningen

$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \ldots + x_r\underline{v}_r = \underline{0}$

Hvis $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$ triviell løsn.

er den eneste løsn, så er vektorene lin. uavhengige. Ellers er vektorene lin. avhengige.

Eks:

La $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ og anta:

$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$

$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$

$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \underline{v}_3$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ utspenner V men er ikke en basis

$V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$

Hvis $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ er lineært uavhengige, så er $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ en basis for V.

$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}$

$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ har $(1, -1, -1)$ som løsn.

Eks: $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$ der $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sjekker om vektorene er lin. uavhengige:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

3×4 lineært system

homogent (ingen konstantledd)

= ingen frie variabler

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ er eneste løsn.

$\Downarrow$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ lineært uavhengige

Uendelig mange løsninger

= minst én fri var.

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ lineært avh.

3 Lineære systemer og Gauss-Eliminasjon

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

generelt m×n lineært (likningssystem)

homogent hvis $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$

Resultat:

Alle lineære system har enten

i) ingen løsn.

ii) én løsn.

iii) uendelig mange løsn

Hvis systemet er homogent, så kan ikke i) skje.

Metode: Gauss-eliminasjon

Eks: $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

utvidet matrise

Elementære radoperasjoner

i) bytte om to rader
ii) gange en rad med $c \neq 0$
iii) legge til et multippel av en rad til en annen rad

pivot = første tall i en rad ulik null

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -2 \end{array}$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-7} & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Trappeform:

i) Alle nullrader nederst i matrisen
ii) Alle pivoter står lengre til høyre enn pivotene i radene over

$$\left(\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & -3 \end{array}\right) \leftarrow -7$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 4 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$-x_2 \quad - x_4 = 0$
$-x_3 + 4x_4 = 0$

$\leftarrow$

Baklengs substitusjon:

$-x_3 + 4x_4 = 0 \qquad x_3 = 4x_4$

$-x_2 \qquad - x_4 = 0 \qquad x_2 = -x_4$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad x_1 = -3x_2 - x_3 - x_4$

$= -3(-x_4) - (4x_4) - x_4$

$x_1 = -2x_4$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 4 & 0 \end{array}\right)$$

en variabel er avhengig av det fins en pivot i den tilsvarende kolonnen, x_1, x_2, x_3

og fri ellers x_4

i) Minst én fri variabel → uendelig mange løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 \\ -x_4 \\ 4x_4 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}$$

ii) Ingen frie variabler : én løsning (= 0 hvis systemet er homogent)

iii) Pivot i siste kolonne : ingen løsninger
(konstantkolonnen)

Eks.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \qquad x_1 = 0$

$-x_2 \qquad = 0 \qquad x_2 = 0$

$-x_3 = 0 \qquad x_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 4 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{7} \end{array}\right)$$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 x_4 = 7$

umulig
ingen løsning

I eks: Løsningene er $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}$ der t = fri / parameter

Det betyr:

i) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ er lineært avhengige

ii) $t=1$: $\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ er løsn. $\Leftrightarrow -2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 4\underline{v}_3 + \underline{v}_4 = \underline{0}$

$\underline{v}_4 = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$

$V = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ utspenner V; er det en basis? Ja!

$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \cdot \underline{v}_2 + x_3 \cdot \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 0 \end{array}\right)$$

kun trivell løsn siden det ikke er noen frie var.

$\Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin uavh. $\Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ basis for V.

Resultat:

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$ n-vektorer

$V = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r)$

$A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_r)$

$\boxed{x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \dots + x_r\underline{v}_r = \underline{0}}$ er det lineært homogent system med utvidet matrise $(A|\underline{0})$

i) De vektorene som har pivotposisjon i tilsvarende kolonne danner en basis for V.

ii) De andre vektorene kan skrives som lin.komb. av basisvektorene i i)

(4) Dimensjon og rang

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$
n-vektorer

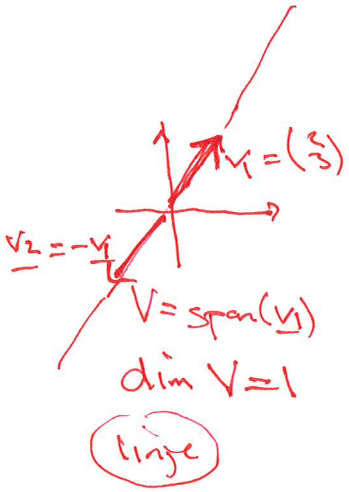
$V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r)$
Vektorrom

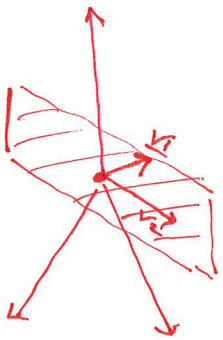
Def. Dimensjon til vektorrommet V er antall vektorer i en basis, og skrives $\dim V$.

Eks: $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$ som i forrige eks.

Basis for V: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$\rightsquigarrow \dim V = 3$

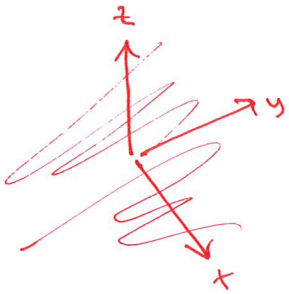




$V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$\dim V = 2$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

plan



$V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$
$= \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ ← basis

$\dim V = 3$

$V = \mathbb{R}^3$

$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & a \\ 2 & \textcircled{1} & 1 & b \\ 1 & 2 & \textcircled{1} & c \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & * \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & * \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & * \end{array}\right)$$

En løsning

$\dim V > 2$: hyperplan

Rang:

A $m \times n$-matrise

Def: rangen til en matrise A er antall pivotposisjoner i matrisen (= antall pivoter i en trappeform), og skrives $\operatorname{rk} A$.

Resultat:

$V = \operatorname{span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r)$ $\quad \dim V = \operatorname{rk} A$

$A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \ldots | \underline{v}_r)$