	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Matriser og matriseregning	[E] 3.1
3	Determinanter og inverse matriser	[E] 3.2 - 3.3

Oppgaver for Forelesning 3	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 3.1 - 3.20
Oppgaver fra læreboken	[E] 3.1 - 3.10

Prøp-in:
Tirsdag kl 17-19
C2-030

(1) Repetisjon:

Lineære system: $(A \mid \underline{b})$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Løsningsmetode: Gauss

- Pivot-posisjoner avgjør antall løsninger
- Regel $\operatorname{rk} A$ = antall pivot-pos.

Homogent tilfelle $\underline{b} = \underline{0}$

- én løsn $\underline{x} = \underline{0}$, $\operatorname{rk} A = n$ — Kun triviell løsn
- uendelig mange løsninger, $\operatorname{rk} A < n$

Generelt:

- ingen løsn.
- én løsn.
- uendelig mange løsninger

Vektorrom: $V = \operatorname{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r)$
= alle lin. komb.

basis: vektorer som utspenner vektorrommet og slik at vektorene er lineært uavhengig

$\Uparrow$

ingen av vektorene er en lin. komb. av de andre

$\Uparrow$

$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + x_r \cdot \underline{v}_r = \underline{0}$ har kun triviell løsning

dimensjon til et vektorrom = antall vektorer i en basis

$\dim V = \text{rk}\, A$ hvis $V = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r)$ og

$A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_r)$

Indreprodukt: $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$

$\underline{v}$ og $\underline{w}$ er **ortogonale** hvis $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

$(\underline{v} \perp \underline{w})$

(2) Matriser og matriseregning

Def: En $m \times n$-matrise er (m rader, n kolonner)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Big\} m$$

(n kolonner)

Regneoperasjoner:

- addisjon / subtraksjon: $A + B$, $A - B$
- skalarmultiplikasjon: $r \cdot A$
- **transponering**: $A \rightsquigarrow A^T$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 1+2 \\ 0+2 & 4+1 & 7+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Def: En matrise kalles **kvadratisk** hvis #rader = #kolonner

Hoveddiagonalen i en kvadratisk matrise består av elementene $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

En matrise kalles **symmetrisk** hvis $A^T = A$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

symmetrisk

Eks: $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + y^2 - x + y + 7 = (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$+ (-1\ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 7$

$= \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + 7$

Matrisemultiplikasjon:

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ikke definert

$2\times 3 \qquad 2\times 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$2\times 3 \qquad 3\times 3$

$\begin{pmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \underline{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_1 & \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_2 & \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_3 \\ \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_1 & \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_2 & \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_3 \end{pmatrix}$

Generelt: $A \quad B \rightsquigarrow A \cdot B$

$m\times n \quad n\times p \quad m\times p$

* definert hvis #kol i A = #rad i B
* produktet er $m\times p$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \qquad 2\times 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \qquad 2\times 2$

Merk: $A \cdot B \neq B \cdot A$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ null-matrisen

Lineære system og matrisemult.:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 11 \end{aligned}$$

3×3 lin. syst.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ koeff.matrisen

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+4z \\ x+3y+9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

$3\times 3 \qquad 3\times 1$

$A\underline{x} = \underline{b}$ kalles matriseformen til det lineære systemet

Kvadratiske former:

Eks: $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 6xy + 4xz + 12yz$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad = \underline{x}^T A \underline{x}$

$(x\ y\ z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\underline{x}^T \qquad x\ y\ z \qquad \underline{x}$

$= A$

Identitetsmatrisen:

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

"

I

Identitetsmatrisen I er den kvadratiske matrisen med 1 på diagonalen og 0 ellers. Den har egenskapen

$$A \cdot I = A \quad \text{og} \quad I \cdot A = A$$

$A\underline{x} = \underline{b} \mid B\cdot$

$BA\underline{x} = B\underline{b}$

$I\underline{x} = B\underline{b}$

$\underline{x} = B\underline{b}$

$3x = 12 \mid \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \cdot 3x = 12 \cdot \frac{1}{3}$

$1x = 4$

$x = 4$

(3) Determinanter og inverse matriser

Def: La A være en gitt matrise. En invers matrise til A er en matrise A^{-1} slik at

$$A^{-1} \cdot A = I \quad \text{og} \quad A \cdot A^{-1} = I$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} \to \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Tilfellet 2×2-matriser:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$ad - bc \neq 0 \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$|A| = ad - bc = \det(A)$

determinanten til A

$ad - bc = 0 \longrightarrow$ A er ikke invertibel

(A^{-1} finnes ikke)

Generelt: – Hvis A har en invers matrise, så er den entydig.

A nxn-matrise

– Matrisen A har en invers $\Longleftrightarrow \begin{cases} m=n \text{ og} \\ |A| \neq 0 \end{cases}$

Eks: $\begin{matrix} x+2y=4 \\ 2x+y=7 \end{matrix}$ $\quad \underset{A}{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}}$ $\quad A\underline{x}=\underline{b}$

$|A| = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 = -3 \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}$

$A\cdot \underline{x} = \underline{b} \quad | \cdot A^{-1}$

$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10/3\\1/3\end{pmatrix}$

Eks: $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\13\end{pmatrix}$

Må utvide det(A) og formel for A^{-1} til nxn-matriser.

(a) Determinant:

A nxn-matrise

$n=2: \begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = ad-bc$

$n>2$: Kofaktorutvikling

$\begin{pmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{pmatrix}$

Eks:

$A = \begin{pmatrix}+&+&+\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$

$C_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

M_{ij} = det. til matrisen vi får når vi sletter rad i og kol. j i A

Kofaktorutvikling langs første rad:

$|A| = 1\cdot C_{11} + 1\cdot C_{12} + 1\cdot C_{13}$

$= +1\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}$

$= +(18-12)-(9-4)+(3-2) = 6-5+1 = \underline{2}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-5&1\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}^T$

Fakta: Kofaktorutvikling langs en hvilken som helst rad eller kolonne gir samme svar, $|A|$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= +7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot * + 0 \cdot *$

$= 7 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{42}$

Def: En matrise er <u>øvre triangulær</u> hvis alle elementer under diagonalen er null. I så fall er determinanten lik produktet på diagonalen.

Invers:

A $n \times n$-matrise

- $|A| \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & & C_{nn} \end{pmatrix}^T}_{adj(A)}$
- $|A| = 0$: A^{-1} finns ikke, A <u>ikke</u> <u>invertibel</u>.