	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Egenverdier og egenvektorer	[E] 4.1 - 4.2
3	Diagonalisering av matriser	[E] 4.3

Oppgaver for Forelesning 4	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 4.1 - 4.7
Oppgaver fra læreboken	[E] 4.1 - 4.4

(1) Repetisjon

Matriseregning:
- add/subtr, skalar mult.
- matrisemult. $A \cdot B$ ($m \times n$, $n \times p$) $AB \neq BA$
- transponering: $A \rightsquigarrow A^T$
- identitetsmatr. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot I = A$, $I \cdot A = A$
- invers: A^{-1} matrise slik at $\begin{cases} AA^{-1} = I \\ A^{-1}A = I \end{cases}$
- determinant

A $n \times n$ $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ skalar

Utregning av det:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + 4 \cdot C_{13}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +(-6-2) - 2(18-8) + 4(3+4) = -8 - 20 + 28$$

$$= 0$$

Resultat:

A $n \times n$: i) A invertibel $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ (A^{-1} finns)

ii) hvis $|A| \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}^T$

Alt metode: Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow -3 \\ \rightarrow -4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} \rightarrow -1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-7)0 = 0$$

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ 0 & \square \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-7) \cdot 0$$

Resultat:

$A \to B$ elementær radoperasjon

$|B| = |A|$ hvis vi legger til et mult. av en rad til en annen rad

$|B| = -|A|$ hvis vi bytter to rader

$|B| = c \cdot |A|$ hvis vi mult en rad med $c \neq 0$

Noen nyttige formler:

i) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

iii) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I$$

(2) Egenverdier og egenvektorer

Defn. En **egenverdi** for A er et tall λ slik at

A kvadratisk matrise

$$(*) \quad \boxed{A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}}$$

har en ikke-triviell løsning $\underline{v} \neq \underline{0}$. Slik tall kalles da ikke-triviell løsning $\underline{v}$ for **egenvektorer** for A med egenverdi λ.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5y \\ -2x-6y \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x+5y \\ -2x-6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x + 5y &= \lambda x \\ -2x - 6y &= \lambda y \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -2 & -6-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x - \lambda x + 5y &= 0 \\ -2x - 6y - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

Husk:

λ ikke egenverdi $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -2 & -6-\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

λ egenverdi $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$ fritt variabler, uendelig mange løsn.

Husk!

$A^{-1} \cdot | \quad A\underline{x} = \underline{0} \quad |A| \neq 0$

$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{0}$

$\underline{x} = \underline{0}$

Metode for å finne egenverdier:

A n×n-matrise

(*) $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

$A\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0}$

$A\underline{v} - \lambda \cdot I\underline{v} = \underline{0}$

$(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$

λ egenverdi $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$ karakteristisk likning.

Eks:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ Kar.likn: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(-6-\lambda) - 5 \cdot (-2) = 0$

$-6 + 6\lambda - \lambda + \lambda^2 + 10 = 0$

$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda+4) = 0$

Egenverdier: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$

Resultat: Hvis A er en n×n-matrise, så blir den karakteristiske likningen en polynomlikn. i λ av grad n.

Egenvektorer:

Defn: E_λ = egenrommet til A for egenverdien λ
= alle egenvektorene til A med egenverdi λ (inkl. $\underline{0}$)
= alle løsninger av $(A-\lambda I)\underline{v}=\underline{0}$.

Eks:

$A=\begin{pmatrix}1&5\\-2&-6\end{pmatrix}$

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-4$

$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&5\\-2&-6-\lambda\end{pmatrix}$

E_{-1}: $\begin{pmatrix}2&5\\-2&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&5\\-2&-5\end{pmatrix}\overset{+1}{\downarrow}\rightarrow\begin{pmatrix}2&5\\0&0\end{pmatrix}$

$2x+5y=0 \quad x=-5y/2$
y fri

$\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5y/2\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5t/2\\t\end{pmatrix}$

$t\cdot\begin{pmatrix}-5/2\\1\end{pmatrix}=\frac{t}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

$\underline{v}_1=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$: $E_{-1}=\text{span}(\underline{v}_1)$

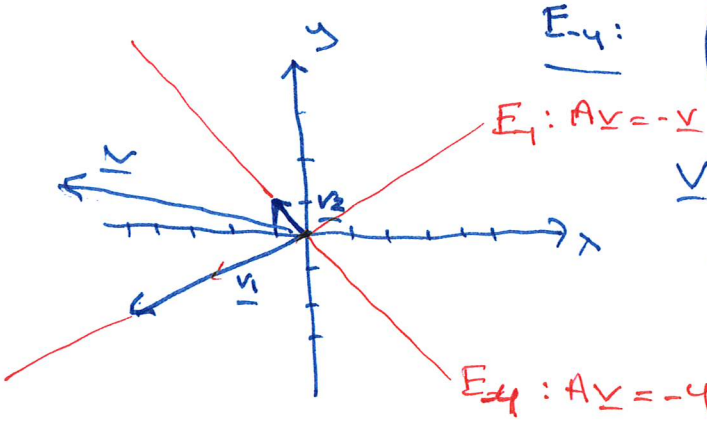
$\underline{v}=\underline{v}_1+2\underline{v}_2=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$

$A\underline{v}=A(\underline{v}_1+2\underline{v}_2)=-\underline{v}_1+2(-4\underline{v}_2)$
$=-\underline{v}_1-8\underline{v}_2$

E_{-4}: $\begin{pmatrix}5&5\\-2&-2\end{pmatrix}\overset{2/5}{\downarrow}\rightarrow\begin{pmatrix}5&5\\0&0\end{pmatrix}$ $5x+5y=0$, y fri

$\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\underline{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$: $E_{-4}=\text{span}(\underline{v}_2)$



Oppsummering:

A $n \times n$-matrise

- **Egenverdier:** $|A - \lambda I| = 0$ — n'te-grads likn.
- **Egenvektorer:** $(A - \lambda I)\underline{v} = 0$ for hver egenverdi λ (E_λ)

Eks:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: Kar.likn $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$

$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = 0$

$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$

$a+d$ = tr(A), $ad-bc$ = det(A)

tr A = sporet til A = Summen av tallene på diagonalen

$$\boxed{\lambda^2 - \text{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A) = 0}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$:

Egenverdier : $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(3-\lambda)+3] - 2(3(3-\lambda)+4) + 4(9-4(1-\lambda)) = 0$

$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 4\lambda + 6) - 2(13-3\lambda) + 4(5+4\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda = 0 \qquad -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 12) = 0$

$\lambda = 0$ eller $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + (+1) = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

ingen (reelle) egenverdier

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 1$$

Ser på $n \times n$-matriser med n forskjellige egenverdier.

(3) Diagonalisering.

Defn. En matrise D er diagonal hvis

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 3.7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Defn. A $n \times n$-matrise. A kalles diagonaliserbar hvis det fins en inverstbar matrise P slik at

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

er diagonal.

Resultat: Hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer så er A diagonaliserbar.

A nxn-matrise

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$: lin. uavhengige egenvektorer

$A\underline{v}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1$, $A\underline{v}_2 = \lambda_2 \cdot \underline{v}_2$, ..., $A \cdot \underline{v}_n = \lambda_n \cdot \underline{v}_n$

$$P = \left(\underline{v}_1 \,|\, \underline{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \underline{v}_n\right)$$

nxn-matrise, inverterbar (P^{-1} finns)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nxn-matrise diagonal

Vil ha:

$P^{-1}AP = D \quad | \cdot P$

~~$PP^{-1}AP = PD$~~

$AP = PD$

$$A \cdot P = A \cdot \left(\underline{v}_1 \,|\, \underline{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \underline{v}_n\right) = \left(A\underline{v}_1 \,|\, A\underline{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, A\underline{v}_n\right)$$

$$= \left(\lambda_1 \underline{v}_1 \,|\, \lambda_2 \underline{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \lambda_n \underline{v}_n\right) =$$

$$PD = \left(\underline{v}_1 \,|\, \underline{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \underline{v}_n\right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\lambda_1 \underline{v}_1 \,|\, \lambda_2 \underline{v}_2 \,|\, \ldots\right)$$

$=$

$AP = PD$

$P^{-1}AP = D$ diagonalisering.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$ $E_1 = \text{span}(\underline{v}_1)$ $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -4$ $E_{-4} = \text{span}(\underline{v}_2)$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ lin. uavh? Ja.

$P = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|P| = -5 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = -3 \neq 0$

$\Downarrow$

Vet at $P^{-1} A \cdot P = D$ diagonalisering

En samling egenvektorer for A bestående av basisvektorer for E_λ for de forskjellige egenverdiene λ er alltid lineært uavhengige vektorer.

Bevis i tilfellet ovenfor:

$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 = \underline{0}$

$A \cdot | \quad A x_1 \underline{v}_1 + A x_2 \cdot \underline{v}_2 = A \cdot \underline{0}$

$x_1 \cdot A\underline{v}_1 + x_2 A\underline{v}_2 = \underline{0}$

$x_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + x_2 \cdot \lambda_2 \underline{v}_2 = 0$

$\lambda_1 \, | \, x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 = \underline{0}$

$x_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + x_2 \lambda_1 \underline{v}_2 = \underline{0}$

$x_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + x_2 \cdot \lambda_1 \underline{v}_2 = 0$

$x_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \underline{v}_2 = 0 \quad | : (\lambda_2 - \lambda_1)$

$\neq 0$

$x_2 \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}$

$x_2 = 0$

$x_1 \underline{v}_1 = \underline{0} \quad x_1 = 0$

} kun trivell løsning $x_1 = x_2 = 0$

Resultat: i) Hvis A har n ulike egenverdier, så er A diagonaliserbar.

A n×n-matrise

ii) Hvis A er symmetrisk, $(A^T = A)$ så er A diagonaliserbar.

Eks. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ symm.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (\underline{v_1} \mid \underline{v_2})$$