	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Ortogonal diagonalisering	[E] 4.5
3	Definitthet av kvadratiske former	[E] 4.6 (til midt på s. 110)

Oppgaver for Forelesning 4	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 5.1 - 5.10
Oppgaver fra læreboken	[E] 4.11ac, 4.12, 4.13ab, 4.15 - 4.17

① Repetisjon:

Egenverdier / egenvektorer

A $n \times n$ (*) $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

$(A - \lambda I) \cdot \underline{v} = \underline{0}$

i) λ egenverdi hvis det fins ikke-triviell løsn for $\underline{v}$

Metode: $|A - \lambda I| = 0$

løsning av karakteristisk likn. = egenverdier

"forventer" n egenverdier

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$n=2$: $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A) = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$

ii) Hvis λ er egenverdi for A, kalles alle $\underline{v} \neq \underline{0}$ som er løsn. av (*) for egenvektor for A med egenverdi λ

Metode: Gauss-eliminasjon

E_1: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x + y = 0 \quad x = -y$

y fri

$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $E_1 = \mathrm{span}(\underline{v}_1)$

Egenrom: E_λ = mengden av alle løsn. av (*) for λ, inkl. $\underline{v} = \underline{0}$

Fakta: Hvis A er $n \times n$-matrise med n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ så har vi:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$
$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Diagonalisering

A $n \times n$

Diagonalisering av A: $P^{-1}AP = D$ diagonal matrise

$AP = PD$ (⇑)

A diagonaliserbar $\iff$ A har n lineært uavhengige egenvektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ slik at $A \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \cdot \underline{v}_i$. Da er:

$$P = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \ldots | \underline{v}_n) \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Egenverdier: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

Egenvektorer: $E_1 = \text{span}(\underline{v}_1)$ $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_3 = \text{span}(\underline{v}_3)$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ diagonalisering av } A$$

$$P^{-1}DP = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fakta: Hvis A er $n \times n$-matrise med n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.

(2) Ortogonal diagonalisering

Husk: $\underline{v} \perp \underline{w}$ ($\underline{v}, \underline{w}$ ortogonale) hvis $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

Defn: Vektorene $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ kalles ortogonale (ortogonal mengde) hvis $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ for $i \neq j$. Hvis vektorene i tillegg har lengde 1, så kalles $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ en ortonormal mengde.

Altså: i) $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ hvis $i \neq j$ — i): ortogonal mengde

ii) $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = 1$ — i)-ii): ortonormal mengde

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$ $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

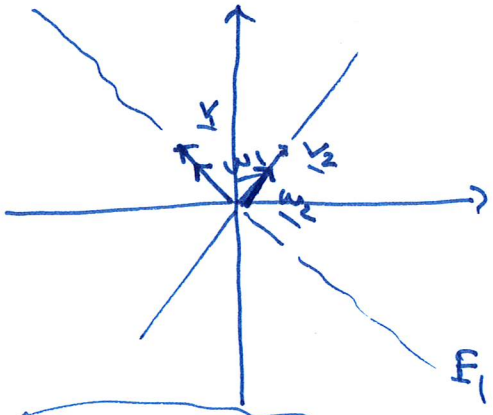
$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$ $= 0$

ortogonal mengde siden $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ $\|\underline{v}_1\| = \sqrt{2}$ $\|\underline{v}_2\| = \sqrt{2}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $E_1 = \text{span}(\underline{v}_1) = \text{span}(\underline{w}_1)$ $\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\|\underline{w}_1\| = 1$

$E_2 = \text{span}(\underline{v}_2)$ $\underline{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Konkl: $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ er en ortonormal mengde.



Fakta:

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ n-vektorer $A = (\underline{v}_1 | \ldots | \underline{v}_n)$ $n \times n$-matrise

$A^{-1} = A^T$
$\Updownarrow$
$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ ortonormal mengde

$A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A^T \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \ldots | \underline{v}_n \right) = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 & \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 & \cdots \\ \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = I$$

$\Updownarrow$

$\underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = 1$
$\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0 \quad i \neq j$

Defn:
En $n \times n$-matrise A kalles ortogonal hvis $A^{-1} = A^T$.

Eks: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ er en ortogonal matrise

w_1 w_2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Setn En ortogonal diagonalisering av A $n \times n$-matrise er $P^T A P = D$ diagonal, der P er en ortogonal matrise.

$P^T = P^{-1}$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 3$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$E_1 = \text{span}(\underline{v}_1)$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_3 = \text{span}(\underline{v}_2)$; $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Husk: A kalles symmetrisk hvis $A^T = A$

Fakta:

i) Hvis A har en ortogonal diagonalisering så er A symmetrisk.

ii) Hvis A er symmetrisk og $\underline{v}, \underline{w}$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier, så $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

iii) Hvis A er symmetrisk, så er A ortogonal diagonaliserbar.

Forklaring av i): $P^T A P = D \mid \cdot P^T$

$P \cdot \mid P^T A = D P^T$

$A = P D P^T$

$A^T = (P D P^T)^T$

$= (P^T)^T \cdot D^T \cdot P^T = P \cdot D \cdot P^T = A$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetrisk

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ortogonal diag.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$+(3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

$\lambda = 3$, $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda = 2$, $\lambda = 4$

E_2:

$$\left(\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x - z = 0$

$y = 0$

z fri

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

E_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \textcircled{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = 0$

$z = 0$

y fri

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E_4:

$$\left(\begin{array}{ccc} \textcircled{-1} & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot -1$$

$x = -z$

$y = 0$

z fri

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Kvadratiske former

Defn. En polynomfu. kalles en **kvadratisk form** hvis alle ledd har grad 2.

Eks: $f(x) = ax^2$

$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

$f(x,y,z) = x^2 - 6xy + 4xz + y^2 - 2yz + 5z^2$

$$= (x \; y \; z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{x}^T A \underline{x}$$

$\underline{x}^T$: 1×3, A: 3×3, $\underline{x}$: 3×1

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$$(x \; y \; z) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - 3y + 2z \;\; -3x + y - z \;\; 2x - y + 5z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (x - 3y + 2z) \cdot x + (-3x + y - z) \cdot y + (2x - y + 5z) \cdot z$$

$$= x^2 - 3yx + 2zx - 3xy + y^2 - zy + 2xz - yz + 5z^2$$

$$= x^2 - 6xy + 4xz + y^2 - 2yz + 5z^2$$

Fakta: En kvadr. form $f(x_1, \ldots, x_n)$ kan skrives entydig som $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ der A er en **symmetrisk matrise**.

og $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$x \; y \; z$

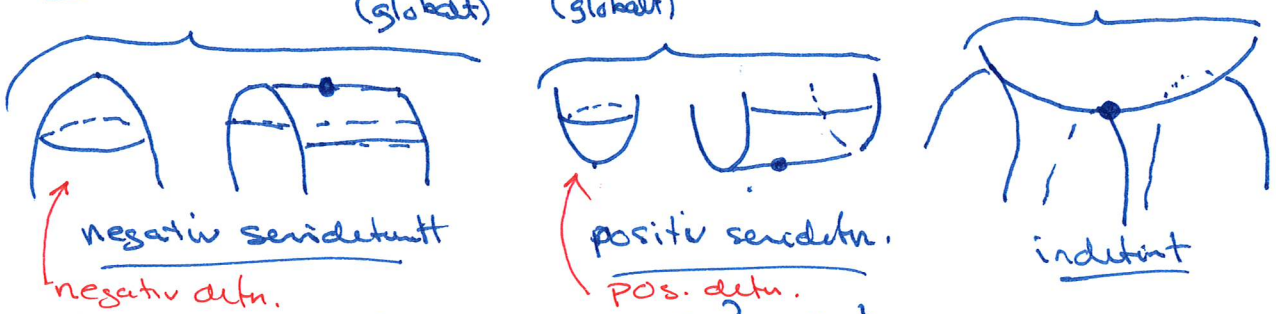
$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} =$$

$$\rightsquigarrow 2x^2 + 2xy - 2xz + 3y^2 + 4z^2$$

Hva vet vi om en kvadratisk form $f(x,y)$

i) $\underline{0} = (0,0,\ldots,0)$ er et stasjonært punkt for f

ii) $\underline{0}$ er enten maks (globalt), min (globalt) eller sadelpunkt



Eks: $f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy - 2xz + 3y^2 + 4z^2$

foc:

$$f'_x = 4x + 2y - 2z = 0$$
$$f'_y = 2x + 6y = 0$$
$$f'_z = -2x + 8z = 0$$

Resultat: $f(\underline{x})$ kvadr. form med symm. matrise A med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

i) f positiv semidefn. $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$

positiv defn. $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$

ii) negativ —11— $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$

negativ defn. $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$

iii) indefinit $\Longleftrightarrow$ både positive og negative egenverdier

Definisjon

La $f(x_1,\dots,x_n)$ være en kvadratisk form med symmetrisk matrise A. Da kalles f (og A)

i) positiv semidefinitt hvis $f(\underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x}$

ii) negativ — " — hvis $f(\underline{x}) \leq 0$ — " —

iii) indefinitt ellers

og positiv definitt hvis $f(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$

negativ definitt hvis $f(\underline{x}) < 0$ — " —