	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Definitthet av kvadratiske former	[E] 4.6 (til midt på s 110)
3	Optimering av kvadratiske funksjoner	[E] 5.6

Oppgaver for Forelesning 6	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 6.1 - 6.9
Oppgaver fra læreboken	[E] 5.1bg, 5.3bg, 5.5

① Repetisjon.

Ortogonal diagonalisering:

Fakta: A reell matrise

i) A ortogonal diagonaliserbar $P^TAP = D$, $P^T = P^{-1}$

⇕

A symmetrisk

ii) Hvis A har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ og $\underline{v}_i$ basis for E_{λ_i}, så velger vi

$$\underline{w}_i = \frac{1}{\|\underline{v}_i\|} \cdot \underline{v}_i$$

$$P = \left(\underline{w}_1 \,|\, \underline{w}_2 \,|\, \dots \,|\, \underline{w}_n \right)$$

Fra teori:

Hvis A er symmetrisk og $\underline{v}, \underline{w}$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier, så er $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

Kvadratiske former:

Eks: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz$

På matriseform:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$$

$$= (x \; y \; z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A

(2) Definitthet av kvadratiske former

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratisk form i n variabler

$$f(\underline{x}) = c_1 x_1^2 + c_2 x_1 x_2 + \dots$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Merk: $f(\underline{0}) = 0$

Defn:

f kalles positiv semidefinitt hvis $f(\underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x}$

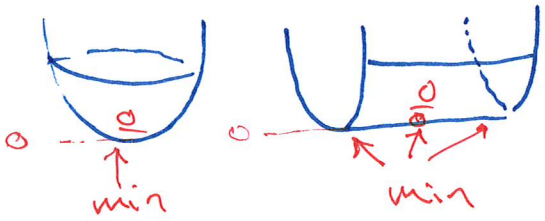
" negativ semidefinitt " $f(\underline{x}) \leq 0$ — " —

f kalles indefinit ellers (har både positive og negative verdier)

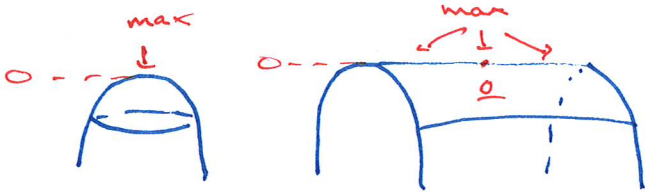
pos. semidefn: $f(\underline{0}) = 0$ er globalt min pkt / min verdi

neg. semidefn: $f(\underline{0}) = 0$ er globalt max pkt / max verdi

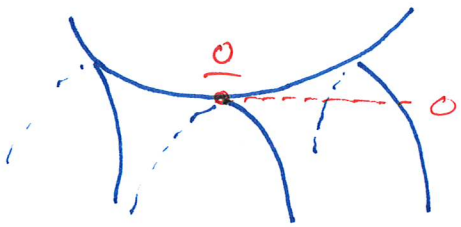
indefn: $\underline{0}$ er et sadelpkt



pos. semidefn.



neg. semidefn.



Sadelpkt

Teorem

$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ kvadratisk form i n variabler

A er symmetrisk $n \times n$-matrise med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Da har vi:

f positiv semidefn. $\iff \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$

f negativ $-\,''\,-$ $\iff \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq 0$

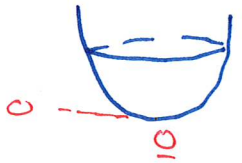
f indefinit ellers (vi har både pos. og neg. egenverdier)

f positiv defn. $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$

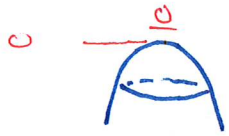
f negativ defn. $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$

Defn: f positiv defn. hvis $f(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$

f neg. defn $f(\underline{x}) < 0$ $-\,''\,-$



pos. defn.
$\underline{0}$ er eneste globale min pkt med $f(\underline{0}) = 0$



neg. defn. eneste globale max pkt med $f(\underline{0}) = 0$

Eks. 1: $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda = 3, \lambda = 1$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\Downarrow$

f pos. def.

$(0,0)$ er gl. min for f

$f_{min} = f(0,0) = 0$

$f'_x = 4x - 2y = 0$ stasj. pkt: $(0,0)$

$f'_y = -2x + 4y = 0$

$f''_{xx} = 4 = A$ $\quad f''_{xy} = -2 = B$

$f''_{yx} = -2$ $\quad f''_{yy} = 4 = C$

$AC - B^2$

$H(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 16 - 4 = 12 > 0$

$4 > 0$

A

} andrederivert-testen: $(0,0)$ er et lokalt min.

Eks 2: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2 - 1/4\right) - 1/2 \cdot \left(1/2(1-\lambda) + 1/4\right) - 1/2\left(1/4 + 1/2(1-\lambda)\right) = 0$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3/4) + \left(\frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\lambda\right) = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$

$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{2}$

$= \frac{2 \pm 1}{2}$

$= 3/2, 1/2$

$(1-\lambda)\cdot(\lambda - 3/2)(\lambda - 1/2) + 2\left(\frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4}(2\lambda - 3) = \frac{1}{2}(\lambda - 3/2)$

$(\lambda - 3/2)\cdot\left[(1-\lambda)(\lambda - 1/2) + 1/2\right] = 0$

$(\lambda - 3/2)\left(-\lambda^2 + 3/2\,\lambda\right) = 0$ $\quad \lambda_1 = 3/2 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 3/2$

$(\lambda - 3/2)\cdot(-\lambda)(\lambda - 3/2) = 0$ $\quad f$ positiv semidefin.

Definitthet av kvadratiske former og ortogonal diag.

Anta $f(\underline{x})$ er en kvadratisk fkn i n variabler.

- Da er $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$, A symm. $n \times n$-matrise.
- Vet også er A har ortogonal diagonalisering sida A er symmetrisk:

$$P^T A P = D$$

Vi gjør variabelskifte: $\underline{x} = P \cdot \underline{u} \iff \underline{u} = P^T \cdot \underline{x}$

Da har vi:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \underline{w}_1 & - \\ - & \underline{w}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \underline{w}_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = (P\underline{u})^T A (P\underline{u})$$

$$= \underline{u}^T \cdot \underbrace{P^T A P}_{D} \underline{u} = \underline{u}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \underline{u}$$

$$= \lambda_1 \cdot u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2$$

Eks: $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3u_1^2 + u_2^2$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1$

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad -x - y = 0, \ y \text{ fri}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad x - y = 0, \ y \text{ fri}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$= \underline{3u_1^2 + u_2^2}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

Eks: 2 : $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 + xy - xz + yz = \underline{\frac{3}{2}u_1^2 + 0\cdot u_2^2 + \frac{3}{2}u_3^2}$

positiv semidefin.

Eks: tegn en skisse av kurven $\underbrace{2x^2 - 2xy + 2y^2}_{3u^2+v^2} = 12$

$3u^2 + v^2 = 12 \quad |:12$

$\frac{3u^2}{12} + \frac{v^2}{12} = 1$

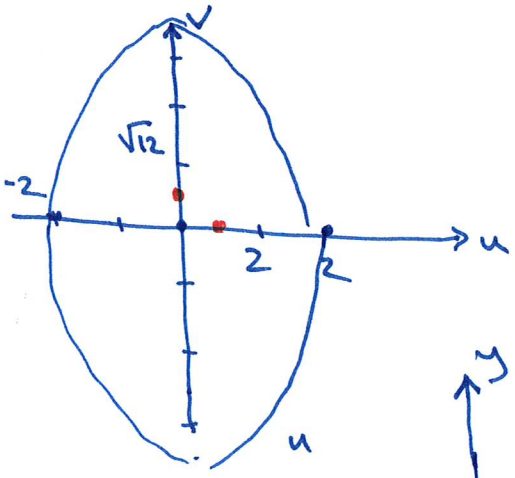
$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{12} = 1$

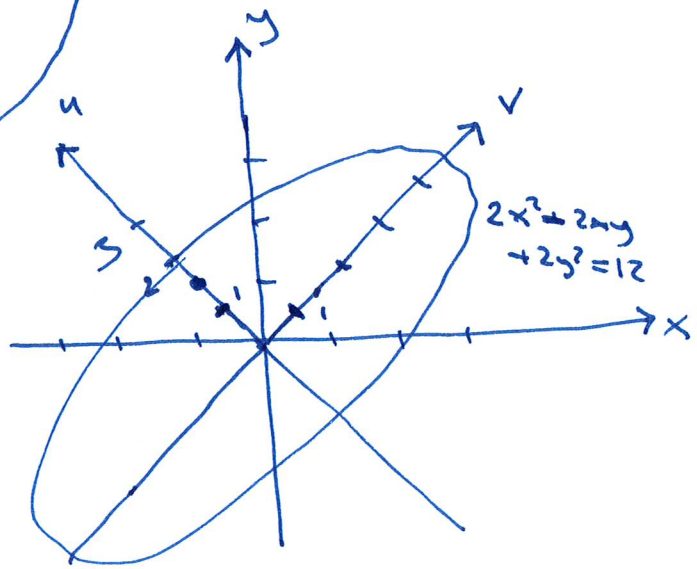
$a=2 \quad b=\sqrt{12}$

Ellipseformel:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a,b: halvaksene





$u=1, \quad u=0$
$v=0 \quad v=1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(3) Optimering av kvadratiske funksjoner

Eks: $f(x,y) = x^2 - 6xy + 4y^2 + 3x - 2y + 7$

er et eksempel på en kvadratisk funksjon
= polynomfunksjon av grad 2

Stasjonære punkt.

$f'_x = 2x - 6y + 3 = 0$ (FOC)

$f'_y = -6x + 8y - 2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x - 6y &= -3 \\ -6x + 8y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & -3 \\ 0 & -10 & -7 \end{array}\right)$$

$y = -7/-10 = 7/10 = 0.7$

$2x - 6(0.7) = -3 \quad \frac{2x}{2} = -3 + 4.2 = \frac{1.2}{2} \quad x = 0.6$

Stasjonære punkt: $(x,y) = (6/10, 7/10) = (0.6, 0.7)$

Klassifikasjon: $f''_{xx} = 2 \quad f''_{xy} = -6 \quad f''_{yy} = 8$

$AC - B^2 = |H(f)| = 16 - 36 = -20 < 0$

Sadelpkt

Eks: $f(x,y) = x^2 - 6xy + 4y^2 + 3x - 2y + 7$

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \underline{x} + (3 \; -2) \cdot \underline{x} + (7)$$

$$(3 \; -2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x - 2y$$

$$\boxed{f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = (3 \; -2) \quad C = (7)$$

Resultat:

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f'(\underline{x}) &= 2A\underline{x} + B^T \\ H(f) &= 2A \end{aligned}}$$

Husk: $f'(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}$ $H(f) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$

Eks: $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = (3 \; -2)$ $C = (7)$

Stasjonære pkt: $f'(\underline{x}) = 2A\underline{x} + B^T = \underline{0}$

$$2A\underline{x} = -B^T$$

Lineært system: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & -3 \\ -6 & 8 & 2 \end{array}\right)$ Gauss. $\rightarrow$ $x = 6/10$, $y = 7/10$

Mer ellers min?

Resultat:

$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C$ kvadratisk funksjon

- Hvis A er positiv semidefinitt, så er alle stasjonære pkt globale min pkt
- Hvis A er negativ semidefinitt, så er alle stasjonære pkt globale max pkt
- Hvis A er indefinitt, så er alle stasj. pkt sadelpkt

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 5\lambda - 5 = 0$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} \quad \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0$$

$\Rightarrow$ $(6/10, 7/10)$ sadelpkt, ingen max/min

Eks: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz + 4x - 3y + z + 4$

$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = (4 \ \ -3 \ \ 1) \qquad C = (4)$$

$\lambda_1 = 3/2, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 3/2$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

A pos. semidefin.

stasj pkt = globale min

Stasj. pkt: $2A\underline{x} + B^T = 0$

$2A\underline{x} = -B^T$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \cdot (-1) \cdot 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

ingen løsninger $\Rightarrow$ ingen stasj. pkt

Ingen maks/min-pkt.