Løsning	Eksamen i ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	28. november 2011 kl 1400-1900

Oppgave 1.

(a) Vi har at $P(X < Y) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = \mathbf{0.45}$.

(b) Vi har at $P(Y = 1) = 0.45,\ P(Y = 2) = 0.30,\ P(Y = 3) = 0.25$. Dermed får vi

$$E[Y^n] = 1^n \cdot 0.45 + 2^n \cdot 0.30 + 3^n \cdot 0.25$$

Dette gir $E[Y] = \mathbf{1.80}$ og $E[Y^2] = 3.90$, og dermed er

$$\mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 3.90 - 1.80^2 = \mathbf{0.66}$$

(c) Vi har $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$, og vi ser at

$$E[X] = 1 \cdot 0.60 + 2 \cdot 0.40 = 1.40$$

og at

$$E[XY] = 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot (0.20 + 0.25) + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.10 + 6 \cdot 0.05 = 2.4$$

Dermed er $\mathrm{Cov}[X,Y] = 2.4 - 1.8 \cdot 1.4 = \mathbf{-0.12}$. Variablene ikke uavhengige.

Oppgave 2.

(a) Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \le x \le 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2 - 2xy + y^2)\,\mathrm{d}y = k\left[x^2y - xy^2 + y^3/3\right]_0^1 = \mathbf{k(x^2 - x + 1/3)}$$

Siden f er en sannsynlighetstetthet, må vi ha

$$\int_0^1 k(x^2 - x + 1/3)\,\mathrm{d}x = k\left[x^3/3 - x^2/2 + x/3\right]_0^1 = k(1/3 - 1/2 + 1/3) = k/6 = 1$$

Det følger at $k = \mathbf{6}$. (Vi har at $f(x,y) = k(x^2 - 2xy + y^2) = k(x-y)^2 \ge 0$, så $k = 6$ gjør f til en sannsynlighetstetthet.)

(b) Vi regner ut den kumulative fordelingen $F(a,b) = P(X \le a, Y \le b)$ for $0 \le a \le 1$ og $0 \le b \le 1$ ved å regne ut integralet

$$\begin{aligned}
P(X \le a, Y \le b) &= \int_0^a \int_0^b 6x^2 - 12xy + 6y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a 6x^2\,[y]_0^b - 12x\left[y^2/2\right]_0^b + \left[2y^3\right]_0^b\,\mathrm{d}x = \int_0^a 6x^2b - 6xb^2 + 2b^3\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x^3b - 3x^2b^2 + 2b^3x\right]_0^a = \mathbf{2a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^3}
\end{aligned}$$

(c) Vi bruker $f_X(x) = 6x^2 - 6x + 2$ og regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(6x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{4}x^4 - 2x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2 + 1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(6x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{6}{5} - \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{30}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{11}{30} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{7}{60}}$$

(d) Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (6x^2 - 12xy + 6y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 (6x^3y - 12x^2y^2 + 6xy^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 6x^3 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 - 12x^2 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 6x \left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\mathbf{\frac{1}{12}}$ siden $E[Y] = E[X]$ ved symmetri.

(e) Vi har at

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1/2, Y \leq 1/2) &= \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} 6x^2 - 12xy + 6y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^1 6x^2\,[y]_0^{1/2} - 12x\,[y^2/2]_0^{1/2} + [2y^3]_0^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^1 \left(3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}x = \left[x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{1/2}^1 \\
&= (1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{8}) = \mathbf{\frac{7}{16}}
\end{aligned}$$

Alternativt kan man bruke at sannsynligheten er gitt ved $F(1, 1/2) - F(1/2, 1/2)$ og bruke uttrykket for $F(a, b)$ fra oppgave b).

Oppgave 3.

(a) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ er lineært avhengige hvis og bare hvis minst en av vektorene kan skrives som en lineær-kombinasjon av de tre andre. Vi forsøker å skrive $\mathbf{v}_4 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Siden koeffisientmatrisen har determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 1(7+1) + 3(0+2) = 14 \neq 0$$

så har likningssystemet en løsning, og dermed er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineært avhengige.

(b) Regningen i oppgave a) viser at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige: Siden determinanten i a) er ulik null, har likningen $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ kun løsningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Oppgave 4.

(a) Vi vet at $\lambda = 2$ er egenverdi for A hvis og bare hvis $\det(A - 2I) = 0$. Vi regner ut $\det(A - 2I)$:

$$\begin{vmatrix} 4-2 & -1 & 6 \\ 2 & 1-2 & 6 \\ 2 & -1 & 8-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

siden alle radene i matrisen er like. Dette viser at $\lambda = 2$ er en egenverdi for A.

(b) Vi regner ut det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) - 2(-1(8-\lambda) + 6) + 2(-6 - 6(1-\lambda))$$

Vi vet at $\lambda - 2$ er en faktor i det karakteristiske polynomet, og vi forsøker derfor å forenkle og faktorisere polynomet:

$$(4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-7) - 2(\lambda-2) + 12(\lambda-2) = (\lambda-2)\left[(4-\lambda)(\lambda-7) - 2 + 12\right]$$

De andre egenverdiene er derfor gitt ved

$$(4-\lambda)(\lambda-7) - 2 + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^2 + 11\lambda - 18 = 0$$

Dette gir $\lambda = 2$ and $\lambda = 9$. Dermed er alle egenverdiene for A gitt ved

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 9}$$

og $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2^2 \cdot 9 = \mathbf{36}$.

Oppgave 5.

(a) Differensiallikningen $y'' + 8y' + 16y = 32$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' + 8y' + 16y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 8r + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -4, -4$$

Dette gir $y_h = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med A konstant, som gir

$$16A = 32 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = \mathbf{C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} + 2}$.

(b) Differensiallikningen $t^2y' + 2ty = te^{-t}$ er lineær, og vi ser at venstresiden er $(t^2y)'$. Dermed får vi

$$t^2y = \int te^{-t}\,\mathrm{d}t = t(-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t})\,\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} + \mathcal{C}$$

Dette gir

$$y = \frac{\mathbf{-t - 1 + Ce^t}}{\mathbf{t^2e^t}}$$

Oppgave 6.

(a) Vi bruker $F(t, y, \dot{y}) = (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 16y \cdot e^{-0.08t}, \quad F'_{\dot{y}} = 1250\dot{y} \cdot e^{-0.08t}$$

Euler-likningen blir da:

$$F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = 16y \cdot e^{-0.08t} - 1250(\ddot{y} \cdot e^{-0.08t} + \dot{y}e^{-0.08t}(-0.08)) = 0$$

Division med $e^{-0.08t} \neq 0$ gir likningen

$$16y - 1250(\ddot{y} - 0.08\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$$

(b) Vi løser Euler-likningen $\ddot{y} - 0.08\dot{y} - 0.0128y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(25) = e^4$. Differensiallikningen har karakteristiske røtter

$$r^2 - 0.08r - 0.0128 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.16, -0.08$$

Dermed er den generelle løsningen $y = C_1e^{0.16t} + C_2e^{-0.08t}$. Initialbetingelsene er $C_1 + C_2 = 1$ og $C_1e^4 + C_2e^{-2} = e^4$, og vi ser at $C_1 = 1$ og $C_2 = 0$ er løsning. Dermed får vi $y = e^{0.16t}$. Siden $F(t, y, \dot{y})$ er en konveks funksjon i variablene y og $\dot{y}$, så løser $y = e^{0.16t}$ minimumsproblemet. Den minimale verdien av integralet blir dermed

$$\int_0^{25} (8y^2 + 625\dot{y}^2)e^{-0.08t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{25} (8 \cdot e^{0.32t} + 625 \cdot 0.16^2e^{0.32t})e^{-0.08t}\,\mathrm{d}t$$

siden $\dot{y} = e^{0.16t} \cdot 0.16 = 0.16e^{0.16t}$. Dette integralet regner vi ut:

$$\int_0^{25} (8 + 16)e^{0.24t}\,\mathrm{d}t = 24\frac{1}{0.24}(e^6 - 1) = \mathbf{100(e^6 - 1)} \simeq 40,243$$