Sensorveiledning:	ELE 37191	Matematikk valgfag	
Eksamensdato:	13.06.2012	09:00 – 14:00	Totalt antall sider: 5
			Antall vedlegg: 0
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator		
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus		
Innføringsark:	Ruter		
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt
Ordinær eksamen			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi

Oppgave 1.

(a) Vi utvikler determinanten langs første kolonne og dette gir

$$\det(A) = 1(9a - 3a^2) - 1(9-3) + 1(a^2 - a) = -2a^2 + 8a - 6$$

Vi vet at A er inverterbar når $\det(A) \neq 0$. Siden $\det(A) = 0$ for $a = 1$ og $a = 3$, er A inverterbar for $a \neq 1, 3$.

(b) Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T\mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 4 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 3 - x_1 + x_2$.

Oppgave 2.

(a) Vi velger matrisen A symmetrisk, og får dermed at $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad c = 4$$

De stasjonære punktene er gitt ved $\partial f/\partial \mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0}$, og dette gir

$$2A\mathbf{x} = -B^T \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Siden $\det(A) = -1(3-1) = -2 \neq 0$, så er A inverterbar og det er et eneste stasjonært punkt. Vi finner dette ved å løse det lineære likningssystemet, for eksempel ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og finner

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

(b) Vi regner ut egenverdiene til A for å klassifisere den kvadratiske formen, og får

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 2) = 0$$

Dette gir egenverdier $\lambda = -1$ og $\lambda = (-4 \pm \sqrt{16-8})/2 = -2 \pm \sqrt{2}$. Siden alle egenverdier er negative, er A negativ definit, og det stasjonære punktet er dermed et (globalt) maksimumspunkt.

Oppgave 3.

(a) Differensiallikningen $y' = 3 - y$ er både separabel og lineær, og vi velger og løse den som en lineær differensiallikning på standard form $y' + y = 3$ med integrerende faktor e^t, slik at

$$(ye^t)' = 3e^t \quad \Rightarrow \quad ye^t = 3e^t + \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad y = 3 + \mathcal{C}e^{-t}$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = 3 + C$ eller $C = -1$, og løsningen blir derfor $y = 3 - e^{-t}$.

(b) Differensiallikningen $ty' + (1-t)y = e^t$ for $t > 0$ er lineær, og kan skrives på standard form som

$$y' + \frac{1-t}{t} y = \frac{e^t}{t}$$

med $a(t) = (1-t)/t = 1/t - 1$. Siden vi har at

$$\int a(t)\,\mathrm{d}t = \ln t - t + \mathcal{C}$$

så kan vi bruke integrerende faktor $u = e^{\ln t - t} = te^{-t}$, og dette gir

$$(yte^{-t})' = 1 \quad \Rightarrow \quad yte^{-t} = t + \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad y = e^t + \mathcal{C}\,\frac{e^t}{t} = e^t\left(1 + \frac{\mathcal{C}}{t}\right)$$

Initialbetingelsen $y(1) = 3$ gir $3 = e(1+\mathcal{C})$, som gir $\mathcal{C} = 3/e - 1$. Dermed er løsningen

$$y = e^t\left(1 + \frac{3/e - 1}{t}\right) = e^t\,\frac{t - 1 + 3/e}{t} = \frac{(t-1)e^t + 3e^{t-1}}{t}$$

(c) Differensiallikningen $y'' - 3y' + 2y = 2$ er andre ordens lineær, og har løsning $y = y_h + y_p$. Den karakteristisk likingen er $r^2 - 3r + 2 = 0$, og har løsning $r = 1$ og $r = 2$, så den homogene løsningen er $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Den inhomogene likningen har den konstante løsningen $y = 1$, så den generelle løsningen er

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1$$

Initialbetingelsene $y(0) = 0, y'(0) = 1$ gir $C_1 + C_2 + 1 = 0$ og $C_1 + 2C_2 = 1$, som har løsning $C_1 = -3$ og $C_2 = 2$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{-3e^t + 2e^{2t} + 1}$$

Oppgave 4.

(a) La oss først regne ut $f_X(x)$ for $-1 \leq x \leq 1$, som er gitt ved

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} k(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}y = k\left[x^2 y + y^3/3\right]_{-1}^{1} = k(x^2 + 1/3 + x^2 + 1/3) = k(2x^2 + 2/3)$$

Konstanten k må oppfylle likningen

$$\int_{-1}^{1} f_X(x)\ \mathrm{d}x = k\left[2x^3/3 + 2x/3\right]_{-1}^{1} = k(2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3) = k \cdot 8/3 = 1$$

Dette gir at $k = 3/8$. Dermed er $f_X(x) = 3/8(2x^2 + 2/3) = (3x^2 + 1)/4$.

(b) Vi regner ut $E(X)$ og $E(X^2)$ ved å bruke $f_X(x)$:

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (3x^3 + x)/4\ \mathrm{d}x = 0$$

og

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (3x^4 + x^2)/4\ \mathrm{d}x = 1/4\left[3x^5/5 + x^3/3\right]_{-1}^{1}$$

Dette gir $E(X^2) = 1/4(3/5 + 1/3 + 3/5 + 1/3) = 7/15$ og dermed $\mathrm{Var}(X) = 7/15 - 0^2 = 7/15$.

(c) Vi regner ut $E(XY)$ ved å bruke $f(x, y)$:

$$E(XY) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xyf(x, y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 3/8\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^3 y + xy^3\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Vi har indre integral

$$\int_{-1}^{1} x^3 y + xy^3 \mathrm{d}y = \left[x^3 y^2/2 + xy^4/4\right]_{-1}^{1} = 0$$

Dette gir

$$E(XY) = 3/8 \cdot 0 = 0$$

Dermed er $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ siden $E(X) = 0$.

(d) Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Ved symmetri ser vi at $f_Y(y) = (3y^2 + 1)/4$ siden $f_X(x) = (3x^2 + 1)/4$, og vi får

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{16}(x^2 + 1)(y^2 + 1) \neq f(x, y)$$

for $-1 \leq x, y \leq 1$. Dermed er X og Y ikke uavhengige.

Oppgave 5.

(a) Sannsynlighet for x interne og y interne samtaler i løpet av en time er gitt ved

$$f(x,y) = e^{-3}3^x/x! \cdot e^{-1}1^y/y! = e^{-4} \cdot \frac{3^x}{x! \cdot y!}$$

Sannsynlighet for 2 interne og 1 interne samtaler i løpet av en time blir dermed

$$f(2,1) = e^{-4} \cdot \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}e^{-4} \cong 0.082$$

siden X og Y er uavhengige og Poisson-fordelte. Sannsynligheten for at det kommer inn minst en samtale er

$$1 - f(0,0) = 1 - e^{-4} \cong 0.982$$

(b) Sannsynligheten for at det kommer inn tre samtaler i løpet av en time er gitt ved

$$f(0,3) + f(1,2) + f(2,1) + f(3,0) = e^{-4} \cdot (\frac{1}{6} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}) = e^{-4} \cdot \frac{32}{3} \cong 0.195$$

(c) Vi har at $p(X+Y=n)$ kan uttrykkes som

$$f(0,n) + f(1,n-1) + \cdots + f(n,0) = \sum_{i=0}^{n} f(i, n-i) = \sum_{i=0}^{n} e^{-4}\frac{3^i}{i!(n-i)!}$$

Vi setter $Z = X + Y$. Dette betyr at sannsynligheten

$$p(Z=n) = e^{-4} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{3^i}{i!(n-i)!}$$

Vi vil forsøke å vise at Z er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Z = 4$. Vi bruker Poisson fordelingen, og ser at vi må vise at

$$p(Z=n) = e^{-4} \cdot \frac{4^n}{n!} = e^{-4} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{3^i}{i!(n-i)!}$$

Med andre ord, vi må vise at

$$\frac{4^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{3^i}{i!(n-i)!} \quad \Leftrightarrow \quad 4^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}3^i$$

Men binomial-formelen sier at

$$4^n = (3+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i \cdot 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot 3^i$$

og dermed har vi vist at $Z = X + Y$ er Poisson-fordelt med $\lambda_Z = 4$.

Oppgave 6.

(a) Vi har $F = \ln(4y - \dot{y})$ og dette gir partiell-deriverte

$$F'_y = \frac{4}{4y - \dot{y}}, \quad F'_{\dot{y}} = \frac{-1}{4y - \dot{y}}$$

Dermed er Euler-likningen for problemet gitt ved

$$\frac{4}{4y - \dot{y}} - \frac{4\dot{y} - \ddot{y}}{(4y - \dot{y})^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(4y - \dot{y}) - (4\dot{y} - \ddot{y}) = 0$$

Etter at vi forenkler likningen, får vi $\ddot{y} - 8\dot{y} + 16y = 0$. Den karakteristiske likningen er $r^2 - 8r + 16 = 0$ med dobbelrot $r = 4$, og dermed er den generelle løsningen av Euler-likningen gitt ved $y = (C_1 + C_2 t)e^{4t}$. Initialbetingelsene $y(0) = 3$ og $y(3) = -9e^{12}$ gir at $C_1 = 3$ og $(3 + 3C_2)e^{12} = -9e^{12}$, eller $C_2 = -4$. Dette betyr at løsningen $y^* = (3 - 4t)e^{4t}$ tilfredsstiller Euler-likningen og initialbetingelsene.

(b) Vi har andre orden partiellderiverte gitt ved

$$F''_{yy} = \frac{-16}{(4y-\dot{y})^2}, \quad F''_{y\dot{y}} = \frac{4}{(4y-\dot{y})^2}, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{-1}{(4y-\dot{y})^2}$$

Vi har dermed $F''_{yy}, F''_{\dot{y}\dot{y}} < 0$ for all $(y, \dot{y})$, and

$$F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$$

og F er derfor konkav i $(y, \dot{y})$. Dette betyr at y^* gir et maksimum i variasjonsproblemet.