Løsning	Eksamen i ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	7. juni 2016 kl 0900-1400

Dette et et foreløpig løsningsforslag som ikke er komplett. **Det skal ikke publiseres i denne form.**

Oppgave 1.

(a) Vi vet at kolonnevektorene til A er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$, og regner derfor ut determinanten:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-4) = -6$$

Siden $|A| \neq 0$, følger det at kolonnevektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige.

(b) Vi regner ut indreproduktene $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ siden lengden $||\mathbf{v}_i|| = \sqrt{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}$ og får at

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 5, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 38, \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 5$$

Dette gir at lengden av vektorene er

$$||\mathbf{v}_1|| = \sqrt{5}, \quad ||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{38}, \quad ||\mathbf{v}_1|| = \sqrt{5}$$

Vi regner også ut de andre indreproduktene:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 13, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 4, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 11$$

(c) Vi vet at egenverdiene til A er røttene i den karakteristiske likningen $|A - \lambda I| = 0$, og utvikler derfor det karakteristiske polynomet $|A - \lambda I|$ langs andre rad:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

Egenverdiene til A er gitt ved den karakteristiske likningen

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

som gir $\lambda = 2$ eller $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, som gir $\lambda = 3$ eller $\lambda = -1$. Siden vi har både positive og negative egenverdier, så er A indefinitt.

(d) Vi finner egenvektorer for $\lambda = 2$ ved å løse det lineære systemet $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = -3z/11$ og $x = 13z/11$. Egenvektorene for $\lambda = 2$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{11} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{z}{11} \mathbf{v}_1 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene for $\lambda = 3$ ved å løse det lineære systemet $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = 0$ og $x = z$. Egenvektorene for $\lambda = 3$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z\, \mathbf{v}_2 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene for $\lambda = -1$ ved å løse det lineære systemet $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = 0$ og $x = -z$. Egenvektorene for $\lambda = -1$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z\,\mathbf{v}_3 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er $P^{-1}AP$ er diagonal om vi velger P lik matrisen med vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ som kolonner:

$$P = \begin{pmatrix} 13 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2.

(a) Funksjonen f kan skrives på matriseform som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$, hvor A, B, C er matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

De stasjonære punktene til f er dermed gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^T \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi løser det lineære systemet ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og får $(x, y, z) = (-1, 1/2, 1)$.

(b) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen A for å klassifisere det stasjonære punktet. Vi setter opp determinanten og utvikler langs siste rad:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$$

Egenverdiene er $\lambda = 1,\ \lambda = 2,\ \lambda = 6$. Dermed er A positiv definitt, og det stasjonære punktet $(x, y, z) = (1, -1/2, -1)$ et er minimumspunkt.

(c) For hver observasjon er feilen ϵ gitt ved $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon$, og for hele datasettet er vektoren $\underline{\epsilon}$ av feilene $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ gitt ved

$$\mathbf{y} = X\beta + \underline{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \underline{\epsilon} = \mathbf{y} - X\beta$$

Vi ønsker å minimere $\epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_N^2$ (minste kvadraters metode), og dermed å minimere funksjonen som kan skrive på matriseform som

$$\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} = (\mathbf{y} - X\beta)^T \cdot (\mathbf{y} - X\beta)$$

Dette er et annengradfunksjon i β, som kan skrives

$$\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} = \beta^T (X^T X)\beta - 2\mathbf{y}^T X\beta + \mathbf{y}^T \mathbf{y}$$

Det stasjonære punktet er dermed gitt ved

$$2(X^T X)\beta - (2\mathbf{y}^T X)^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (X^T X)\beta = X^T \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$$

når $\det(X^T X) \neq 0$. Siden $X^T X$ er positiv semidefinitt, gir dette stasjonære punktet minimum for $\epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_N^2$.

Oppgave 3.

(a) Vi regner først ut den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2+y^4) + 2xy\,dy = \left[k(x^2y + y^5/5) + xy^2\right]_0^1 = k(x^2+1/5) + x$$

For å bestemme k, bruker vi at $\int f_X(x)\,dx = 1$. Dette gir likningen

$$\int_0^1 k(x^2+1/5) + x\,dx = k\left[x^3/3 + x/5) + x^2/2\right]_0^1 = k(1/3+1/5) + 1/2 = 8k/15 + 1/2 = 1$$

Multiplikasjon med 30 gir $16k + 15 = 30$, og $k = 15/16$. Dermed er

$$f_X(x) = \frac{15}{16}(x^2+1/5) + x = \frac{1}{16}(15x^2 + 16x + 3)$$

når $0 \leq x \leq 1$ (og null ellers).

(b) Vi regner ut $E(X)$ og $E(X^2)$ ved å løse integralene:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{16}(15x^2+16x+3)\,dx = \frac{1}{16}\left[15x^4/4 + 16x^3/3 + 3x^2/2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{16}(15/4 + 16/3 + 3/2) = \frac{45+64+18}{16\cdot 12} = \frac{127}{192} \approx 0.661 \\
E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{16}(15x^2+16x+3)\,dx = \frac{1}{16}\left[15x^5/5 + 16x^4/4 + 3x^3/3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{16}(3+4+1) = \frac{1}{2} = 0.500
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1/2 - (127/192)^2 = 2303/36864 \approx 0.062$.

(c) Vi regner ut $E(XY)$ ved å løse integralet

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot \left(\frac{15}{16}(x^2+y^4) + 2xy\right)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{15}{16}(x^3y^2/2 + xy^6/6) + 2x^2y^3/3\right]_0^1\,dx \\
&= \left[\frac{15}{16}(x^4/8 + x^2/12) + 2x^3/9\right]_0^1 = \frac{15}{16}(1/8+1/12) + 2/9 = \frac{75}{384} + \frac{2}{9} = \frac{481}{1152} \approx 0.418
\end{aligned}$$

(d) Vi regner ut $E(Y)$ ved å løse integralet:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 \int_0^1 y \cdot \big(k(x^2+y^4) + 2xy\big)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[k(x^2y^2/2 + y^6/6) + 2xy^3/3\right]_0^1\,dx \\
&= \left[k(x^3/6 + x/6) + 2x^2/6\right]_0^1 = k(1/3) + 1/3) = \frac{15+16}{48} = \frac{31}{48} \approx 0.646
\end{aligned}$$

Dermed er $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \approx 0.042 - 0.661\cdot 0.646 \approx -0.010$. Siden $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, så er X og Y ikke uavhengige.

Oppgave 4.

(a) Likningen $y'' - 4y' - 21y = 3$ er en lineær annenordens differensiallikning, og den har løsning $y = y_h + y_p$. Den karakteristiske likningen $r^2 - 4r - 21 = 0$ har løsning $r = 7, -3$, så $y_h = C_1e^{7t} + C_2e^{-3t}$. Vi prøver å finne en partikulær løsning $y_p = A$, og innsetting gir $-21A = 3$, eller $A = -3/21 = -1/7$. Dermed er den generelle løsningen

$$y = y_h + y_p = C_1e^{7t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{7}$$

(b) Likningen $e^y - te^y\, y' = 1$ er separabel (men ikke lineær), og kan skrives som

$$-te^y\, y' = 1 - e^y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1-e^y}{-te^y} = \frac{e^y - 1}{e^y} \cdot \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^y}{e^y - 1}\, y' = \frac{1}{t}$$

Integrasjon på begge sider med hensyn til t gir da

$$\int \frac{e^y}{e^y - 1}\, dy = \int \frac{1}{t}\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|e^y - 1| = \ln|t| + C$$

Vi har brukt substitusjonen $u = e^y - 1$ med $du = e^y\, dy$ for å løse det første integralet. Vi løser for y for å få likningen på eksplisitt form:

$$|e^y - 1| = e^{\ln|t| + C} = e^C\, |t| \quad \Rightarrow \quad e^y - 1 = Kt$$

med $K = \pm e^C$. Dette gir $e^y = 1 + Kt$, og $y = \ln(1 + Kt)$.

(c) Likningen $ty' - 2\ln(t)y = 2\ln t$ kan skrives som $y' - (2\ln(t)/t)y = 2\ln(t)/t$, og er derfor en førsteordens lineær differensiallikning. Siden $\int -2\ln(t)/t\, dt = -\ln(t)^2 + C$, ved substitusjonen $u = \ln t$ med $du = (1/t)\, dy$, ser vi at integrerende faktor er $e^{-\ln(t)^2}$. Vi får dermed at

$$(e^{-\ln(t)^2} \cdot y)' = e^{-\ln(t)^2} \cdot \frac{2\ln t}{t} \quad \Rightarrow \quad e^{-\ln(t)^2} \cdot y = \int e^{-\ln(t)^2} \cdot \frac{2\ln t}{t}\, dt = -e^{-\ln(t)^2} + C$$

Vi har brukt substitusjonen $u = -\ln(t)^2$ med $du = -2(\ln(t)/t)\, dy$ for å løse dette integralet. Den generelle løsningen blir derfor

$$y = -1 + C\, e^{\ln(t)^2}$$

Dette kan også skrives som $y = -1 + C\, t^{\ln t}$.

Oppgave 5.

(a) Vi skriver $F = \ln(y' - y + 2t) = \ln(u)$ med $u = y' - y + 2t$ for å forkorte regningene nedenfor. De partielle deriverte er

$$F'_y = \frac{-1}{u}, \quad F'_{y'} = \frac{1}{u}$$

Dermed er Euler-likningen for dette problemet gitt ved

$$\frac{-1}{u} - \left(-\frac{y'' - y' + 2}{u^2}\right) = \frac{-u + (y'' - y' + 2)}{u^2} = \frac{y - y' - 2t + (y'' - y' + 2)}{u^2} = 0$$

Multiplikasjon med u^2 gir dermed likningen

$$y'' - 2y' + y = 2t - 2$$

Dette er en inhomogen annenordens lineær differensiallikning, med karakteristisk likning

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Vi ser at vi har en dobbel rot $r = 1$. Den homogene løsningen av Euler-likningen er dermed

$$y_h = C_1 e^t + C_2 t\, e^t = (C_1 + C_2\, t)\, e^t$$

For å finne en partikulær løsning y_p, setter vi $y = At + B$, som gir $y' = A$ og $y'' = 0$. Innsetting gir da

$$0 - 2A + (At + B) = 2t - 2 \quad \Rightarrow \quad At + (B - 2A) = 2t - 2$$

Sammenligning av koeffisienter gir $A = 2$ og $B - 2A = -2$, eller $A = 2$ og $B = 2$. Dermed er $y_p = At + B = 2t + 2$, og den generelle løsningen av Euler-likningen er

$$y = (C_1 + C_2\, t)\, e^t + 2t + 2$$

Setter vi inn betingelsene $y(0) = 0$ og $y(4) = 2e^4 + 10$, gir den første at $(C_1 + C_2 \cdot 0)e^0 + 2 = 0$, eller at $C_1 = -2$, og den andre at $(-2 + 4C_2)e^4 + 10 = 2e^4 + 10$, eller at $-2 + 4C_2 = 2$. Dette gir $C_2 = 1$ og dermed

$$y^*(t) = (t - 2)e^t + 2t + 2$$

(b) Vi sjekker om F er konkav i (y, y'); i så fall vet vi at y^* er en løsning av max-problemet. Vi regner derfor ut de andrederiverte

$$F''_{yy} = \frac{-1}{u^2}, \quad F''_{y,y'} = \frac{1}{u^2}, \quad F''_{y',y'} = \frac{-1}{u^2}$$

og den Hessiske matrisen

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{y,y} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har satt faktoren som er felles utenfor. Vi ser at determinanten blir

$$\frac{1}{u^4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

og at de to uttrykkene på diagonalen er negative. Derfor er F konkav i (y, y') og $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet (gir maksimum).

(c) Vi har at $y = y^* = (t-2)\, e^t + 2t + 2$ gir $y' = 1 \cdot e^t + (t-2)e^t + 2 = (t-1)e^t + 2$, og derfor er

$$y' - y + 2t = ((t-1)\, e^t + 2) - ((t-2)\, e^t + 2t + 2) + 2t = e^t$$

Dermed er $\ln(y' - y + 2t) = \ln(e^t) = t$, og integralet $J(y^*)$ får verdien

$$J(y^*) = \int_0^4 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^4 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$$

Dette er den maksimale verdien av funksjonalen $J(y)$.