Eksamen	Eksamen i ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	7. juni 2016 kl 0900-1400

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven to bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra hver. **Alle svar skal begrunnes.**

Oppgave 1.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **(6p)** Er kolonnevektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i A lineært uavhengige?
(b) **(6p)** Regn ut lengden til vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og indreproduktene $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$.
(c) **(6p)** Finn egenverdiene til A. Er A positiv (semi)definitt, negativ (semi)definitt eller indefinitt?
(d) **(6p)** Er A diagonaliserbar? Finn i så fall en matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

Oppgave 2.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 + z^2 + 6x - 2z + 1$$

(a) **(6p)** Skriv f på matriseform, og bruk dette til å finne de stasjonære punktene til f.
(b) **(6p)** Er de stasjonære punktene maksimums- eller minimumspunkter?
(c) **Bonus (6p)** En lineær regresjon med modellen $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon$ basert på et datasett med N observasjoner av variablene $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ har beste tilpasning

$$\underline{\beta}^* = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y$$

når observasjonene er representert ved matrisene

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \ldots & x_{Nn} \end{pmatrix} \quad \text{med } \det(X^T X) \neq 0$$

Forklar hvorfor denne tilpasningen er optimal. Hvilket optimeringsproblem løser $\underline{\beta}^*$?

Oppgave 3.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^4) + 2xy, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant k.

(a) **(6p)** Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
(b) **(6p)** Finn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
(c) **(6p)** Finn $E(XY)$.
(d) **(6p)** Finn $E(Y)$. Er X og Y uavhengige?

Oppgave 4.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger:

(a) **(6p)** $y'' - 4y' - 21y = 3$
(b) **(6p)** $e^y - te^y\, y' = 1$
(c) **(6p)** $ty' - 2\ln(t)y = 2\ln t$

Oppgave 5.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max\ J(y) = \max \int_0^4 \ln(y' - y + 2t)\,\mathrm{d}t \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) &= 0 \\ y(4) &= 2e^4 + 10 \end{cases}$$

(a) **(6p)** Finn Euler-likningen for dette problemet, og bestem den entydige løsningen $y^* = y^*(t)$ av Euler-likningen som også oppfyller bibetingelsene. Hint: Bruk $y_p = At + B$.
(b) **(6p)** Vis at $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet.
(c) **Bonus (6p)** Regn ut den maksimale verdien $J(y^*)$ av funksjonalen $J(y)$.

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Noen viktige formler

a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
c) $E(aX+b) = a\,E(X) + b$
d) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
e) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
f) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
g) $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) =$
$a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

Binomisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0,\dots,n$
c) $E(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X=i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1,2,\dots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X=i) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ for $i = 0,1,2,\dots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \mathrm{Uniform}(a,b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \mathrm{Normal}(\mu,\sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell-derivasjon Funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$$

har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = (A + A^T)\mathbf{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon$$

basert på et datasett (N observasjoner) gitt ved

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Differensiallikninger

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \;\mathrm{d}t = uv - \int uv' \;\mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \;\mathrm{d}t = \int f(u) \;\mathrm{d}u$$

Første ordens lineære differensiallikninger
En første ordens lineær differensiallikning

$$y' + a(t)y = f(t)$$

har løsning gitt ved

$$y = \frac{1}{u} \int f(t)u(t)\ \mathrm{d}t$$

der integrerende faktor $u = u(t)$ er gitt ved

$$u(t) = e^{\int a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Andre ordens lineære differensiallikninger
En andre ordens lineær differensiallikning

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

har generell løsning $y = y_h + y_p$ der den homogene løsningen y_h er gitt hjelp av røttene av den karakteristiske likningen

$$r^2 + ar + b = 0$$

Vi har følgende tilfeller:

a) To røtter $r_1 \neq r_2$: $y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
b) En dobbelrot r: $y_h = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$
c) Ingen røtter: $y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ der $\alpha = -a/2$ og $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2$

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max / \min J(y) = \int_a^b F(t, y, \dot{y})\ \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{\dot{y}}) = 0$$