Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Torsdag 18. mai 2017

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

(a) Den utvidede matrisen til likningssystemet er

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & 6 & -11 & 14 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & -3 & 14 \end{bmatrix}}}$$

Gausseliminasjon: 3 ganger rad I legges til rad II:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 12 \\ 1 & -2 & 5 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

Rad I trekkes fra rad III:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Rad II legges til rad III:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 21 \end{bmatrix}}}$$

Dette er en matrise på trappeform (det finnes andre).

Det nye likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 5 \\ -2x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 3x_4 &= 21 \end{aligned}$$

har de samme løsningene som det opprinnelige. Likning III gir $\underline{\underline{x_4 = 7}}$, likning II gir da at $-2x_3 = 12 - 2 \cdot 7$, dvs $\underline{\underline{x_3 = 1}}$. Den andre kolonnen har ingen pivot, så $\underline{\underline{x_2 = s}}$ for en fri parameter s. Likning I gir dermed $x_1 = 5 + 2s - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 7 = \underline{\underline{2s + 30}}$. På matriseform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(b) Matriseformen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ til likningssystemet har

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 6 & -11 & 14 \\ 1 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 14 \end{bmatrix}}}$$

Kolonnevektorene er lineært avhengige fordi den andre kolonnen i trappeformen ikke har pivot. Alternativt: Hvis kolonnene hadde vært lineært uavhengige hadde likningssystemet hatt en unik løsning, men som (a) viser er det uendelig mange løsninger.

(c) Fordi trappeformen har pivoter i kolonne 1, 3 og 4 er $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ en basis for $\text{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Anta

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

er en 3-vektor. Da kan vi utføre de samme elementære radoperasjonen på den utvidede matrisen til likningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ som i (a) og få

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & c_1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2c_1 + c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

Dette likningssystemet har en løsning og derfor er alle 3-vektorer i $\text{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$.

Oppgave 2

(a) For $2 \leqslant x \leqslant 5$ er

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_1^3 \frac{1}{9}(xy - x - 2y + 2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}xy^2 - xy - y^2 + 2y\right]_{y=1}^{y=3} \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot 3^2 x - 3x - 3^2 + 2\cdot 3 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 x - 1x - 1^2 + 2\cdot 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{(9-6-1+2)}{2}x - 9 + 6 + 1 - 2\right] = \frac{2}{9}(x-2) \end{aligned}$$

og ellers er f og derfor f_X lik 0.

For $1 \leqslant y \leqslant 3$ er

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_2^5 \frac{1}{9}(xy - x - 2y + 2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}x^2 - 2xy + 2x\right]_{x=2}^{x=5} \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot 5^2 y - \frac{1}{2}\cdot 5^2 - 2\cdot 5y + 2\cdot 5 - \left(\frac{1}{2}2^2 y - \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2y + 2\cdot 2\right)\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{(25-20-4+8)}{2}y - \frac{25-20-4+8}{2}\right] = \frac{1}{2}(y-1) \end{aligned}$$

og ellers er f og derfor f_Y lik 0.

(b) De stokastiske variablene X og Y har sannsynsynlighetstettheter henholdsvis f_X og f_Y. Fordi $\frac{2}{9}(x-2)\cdot\frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{9}(xy - x - 2y + 2)$ er $f_X f_Y = f$ og X og Y er per definisjon uavhengige.

(c) Vi har at

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_2^5 x\cdot\frac{2}{9}(x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}\cdot x^3 - x^2\right]_{x=2}^{x=5} \\ &= \frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}\cdot 5^3 - 5^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2\right)\right] = \frac{2}{9}\cdot\frac{(125-75-8+12)}{3} = \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_1^3 y\cdot\frac{1}{2}(y-1)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cdot y^3 - \frac{1}{2}\cdot y^2\right]_{x=2}^{x=5} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{(54-27-2+3)}{6} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}} \end{aligned}$$

(d) Fordi X og Y er uavhengige stokastiske variabler er $\underline{\underline{\operatorname{Cov}(X,Y)=0}}$ og $E(XY)=E(X)E(Y)=4\cdot(\frac{7}{3})=\underline{\underline{\frac{28}{3}}}$.

Oppgave 3

(a) Vi multipliserer begge sider i likningen med den integrerende faktoren

$$e^{\int 2t+1\,\mathrm{d}t}=e^{t^2+t}$$

og ser at venstresiden blir $(ye^{t^2+t})'$ mens høyresiden blir e^t. Dermed får vi at

$$ye^{t^2+t}=\int e^t\,\mathrm{d}t=e^t+C \qquad \text{hvor } C \text{ er en ubestemt konstant}$$

som gir

$$y(t)=e^{-t^2-t}(e^t+C)=\underline{\underline{e^{-t^2}+Ce^{-t^2-t}}}$$

(b) Den karakteristisk likningen $r^2+6r+9=0$ har løsning $r=-3$ (dobbeltrot). Dermed er $y_\mathrm{h}=(C_0+C_1t)e^{-3t}$. Vi gjetter på en partikulær løsning: $y_\mathrm{p}=A$ (en konstant). Differensiallikningen gir da $9A=12$ som har løsningen $A=\frac{4}{3}$. Dermed er

$$y(t)=y_\mathrm{h}(t)+y_\mathrm{p}(t)=\underline{\underline{(C_0+C_1t)e^{-3t}+\frac{4}{3}}}$$

hvor C_1 og C_2 er ubestemte konstanter.
Da

$$(C_0+C_1t)e^{-3t}=\frac{(C_0+C_1t)}{e^{3t}}$$

og e^{3t} vokser langt raskere når t vokser enn $|C_0+C_1t|$ uansett hva konstantene C_0 og C_1 er, vil $y(t)\to\frac{4}{3}$ når $t\to\infty$.

(c) Vi multipliserer hver side av likningen med e^y og får den separable likningen $e^y y'=2t$. Dermed er

$$\int e^y\,\mathrm{d}y=\int e^y y'\,\mathrm{d}t=\int 2t\,\mathrm{d}t$$

som gir $e^y=t^2+C$, dvs $y(t)=\ln(t^2+C)$. Initialbetingelsen gir $\ln(C)=0$ dvs $C=e^0=1$ og $\underline{\underline{y(t)=\ln(t^2+1)}}$.

Oppgave 4

(a) Den karakteristiske likningen er $\det(\lambda I-A)=0$, dvs $\lambda^2-29\lambda+54=0$ som har løsninger $\underline{\underline{\lambda=2}}$ og $\underline{\underline{\lambda=27}}$.

(b) For $\lambda=2$ er egenvektorene løsningene på matriselikningen $(2I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på

$$2I-A=\begin{bmatrix}-16 & -12\\ -12 & -9\end{bmatrix}$$

Dividerer rad I med -4:

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\ -12 & -9\end{bmatrix}$$

Adderer 3 ganger rad I til rad II:

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{som er på trappeform}$$

Ingen pivot i andre kolonne, så $x_2 = s$ for en fri parameter s og $x_1 = \frac{-3}{4}s$. Vektoren

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

har lengde $|s|\sqrt{\frac{3^2+4^2}{4^2}} = |s| \cdot \frac{5}{4}$. For at lengden skal bli 1 setter vi $s = \frac{4}{5}$ og får egenvektoren

$$\underline{\underline{\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

For $\lambda = 27$ er egenvektorene løsningene på matriselikningen $(27I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon:

$$\begin{aligned} 27I - A &= \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} && \text{Dividererer rad I med 3} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} && \text{Adderer 4 ganger rad I til rad II} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} && \text{som er på trappeform} \end{aligned}$$

Ingen pivot i andre kolonne så $x_2 = s$ for en fri parameter s og $x_1 = \frac{4}{3}s$. På matriseform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

som har lengde $|s|\sqrt{\frac{4^2+3^2}{3^2}} = |s| \cdot \frac{5}{3}$. For at lengden skal bli 1 setter vi $s = \frac{3}{5}$ og får egenvektoren

$$\underline{\underline{\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

La P være (2×2)-matrisen med med $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ som kolonnevektorer, dvs

$$\underline{\underline{P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}}$$

Da er $D = P^{-1}AP$ diagonalmatrisen med egenverdiene på hoveddiagonalen:

$$\underline{\underline{D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}}}$$

(c) Den kvadratiske formen har symmetrisk matrise

$$\underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}}$$

Vi finner egenverdiene til B som løsningene på likningen $\det(\lambda I - B) = 0$, dvs $(\lambda^2 - 29\lambda + 54)(\lambda - 5) = 0$ som har løsningene $\lambda = 2$, $\lambda = 27$ og $\lambda = 5$. Disse er alle positive og Q er derfor positiv definitt.

(d) Vi har at $0 \neq \det D = \det(P^{-1}BP) = (\det P)^{-1}(\det B)(\det P) = \det B$ så dermed er B invertibel. Ved å multiplisere likningen $D = P^{-1}BP$ med P på venstresiden og med P^{-1} på høyresiden får vi $PDP^{-1} = B$. Da er

$$B^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = \underline{\underline{PD^{-1}P^{-1}}}$$

Fordi P er ortogonal, er $P^{-1} = P^T$ og dermed er $B^{-1} = PD^{-1}P^T$. Hvis D har tallene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ på hoveddiagonalen (og 0 ellers) er D^{-1} også diagonal med $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots \lambda_n^{-1}$ på hoveddiagonalen. Dermed kan vi beregne B^{-1} som et produkt av tre kjente matriser.

Oppgave 5

(a) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen $H = 1 - y^2 - u^2 + pu$. Vi avgjør først om H er konkav i (y, u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = -2y \\ H'_u = -2u + p \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} H''_{yy} = -2 = A \\ H''_{yu} = 0 = B \\ H''_{uu} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-2)(-2) - 0^2 = 4 \geqslant 0$ og $A = -2 < 0$ så H er konkav i (y, u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagin-betingelsene gir

$$\begin{cases} p = 2u & (4) \\ p' = 2y & (5) \end{cases}$$

Vi vil finne en differensiallikning som bare innholder y og dens deriverte. (1) innsatt i (4) gir $p = 2y'$ og hvis vi deriverer får vi

$$p' = 2y'' \qquad (6)$$

(5) og (6) gir dermed den homogene differensiallikningen

$$y'' - y = 0 \qquad (7)$$

Den har karakteristisk likning $r^2 - 1 = 0$ med løsningene $r = \pm 1$. Det gir $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Fra (2) får vi $C_2 = -C_1$. Fra (3) får vi da $C_1(e - e^{-1}) = 2(e - e^{-1})$ dvs $C_1 = 2$ og $C_2 = -2$. Dermed er $\underline{\underline{y(t) = 2e^t - 2e^{-t}}}$. Da er fra (1) $u(t) = y'(t) = \underline{\underline{2e^t + 2e^{-t}}}$.

(b) (1) gir at u kan erstattes med y'. Det gir variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 1 - y^2 - (y')^2 \, \mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y(0) = 0 & (1) \\ y(1) = 2(e - e^{-1}) & (2) \end{cases}$$

Vi avgjør først om $F = 1 - y^2 - (y')^2$ er konkav i (y, y'). Vi har

$$\begin{cases} F'_y = -2y \\ F'_{y'} = -2y' \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} F''_{yy} = -2 = A \\ F''_{yy'} = 0 = B \\ F''_{y'y'} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-2)(-2) - 0^2 = 4 \geqslant 0$ og $A = -2 < 0$ så F er konkav i (y, y') og en løsning på Euler-betingelsen vil derfor gi et maksimum. NB: A, B og C vil generelt ikke være de samme i variasjonsproblemet som i kontrollproblemet.

Vi har videre at

$$\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = -2y''$$

Euler-betingelsen gir dermed $-2y - (-2y'') = 0$ som igjen gir den homogene differensiallikningen (7) som vi fant i (a). Da initialbetingelsene er de samme vil også løsningen bli den samme som for $y(t)$ i (a).