Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Torsdag 18. mai 2017, kl. 09-14

Oppgavesettet er på 2 sider. Alle 16 underpunkter vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 2 sider.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi har følgende lineære likningssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \; + 3x_3 \; - 4x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 6x_2 - 11x_3 + 14x_4 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 \; + 5x_3 \; - 3x_4 &= 14 \end{aligned}$$

(a) Skriv opp den tilhørende utvidede matrisen (det er en (3×5)-matrise). Bruk Gausseliminasjon til å omforme den utvidede matrisen til en matrise på trappeform og bruk denne til å løse likningssystemet.

(b) Skriv likningsystemet på matriseformen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Avgjør om kolonnevektorene $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ i matrisen A er lineært uavhengige.

(c) Finn en basis for $\text{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Avgjør om det finnes 3-vektorer som ikke ligger i $\text{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$.

Oppgave 2

Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y med sannsynlighetstetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}(xy - x - 2y + 2) & \text{for } \; 2 \leqslant x \leqslant 5 \; \text{ og } \; 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Vis at de marginale sannsynlighetstetthetene er gitt som

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x-2) & \text{for } \; 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y-1) & \text{for } \; 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(b) Avgjør om X og Y er uavhengige.

(c) Beregn forventningene $E(X)$ og $E(Y)$.

(d) Bestem kovariansen $\text{Cov}(X,Y)$ og forventningen $E(XY)$.

Oppgave 3

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs $y = y(t)$.

(a) Løs differensiallikningen $y' + (2t+1)y = e^{-t^2}$.

(b) Løs differensiallikningen $y'' + 6y' + 9y = 12$. Forklar hva som skjer med $y(t)$ når $t \to \infty$.

(c) Løs differensiallikningen $y' = 2te^{-y}$ med initialbetingelsen $y(0) = 0$.

Oppgave 4

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$$

(a) Finn egenverdiene til A.

(b) Finn for hver av egenverdiene en egenvektor som har lengde 1. Finn også en matrise P slik at $D = P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise og bestem D.

(c) Skriv opp den symmetriske matrisen til den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 18x_1^2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 24x_1x_2$$

og bruk den til å avgjøre om Q er positiv (semi)definitt, negativ (semi)definitt eller indefinitt.

Anta at B er en $(n \times n)$-matrise og P er en ortogonal matrise slik at $D = P^{-1}BP$ er en diagonalmatrise. Anta også at $\det(D) \neq 0$.

(d) Begrunn hvorfor B er en invertibel matrise og uttrykk B^{-1} ved hjelp av D og P. Forklar hvorfor dette forenkler beregningen av B^{-1}.

Oppgave 5

Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 1 - y^2 - u^2 \, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = u & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \\ y(1) = 2(e - e^{-1}) & (3) \end{cases}$$

(a) Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (angi både y og u).

(b) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Noen viktige formler

a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
c) $E(aX+b) = a\,E(X) + b$
d) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
e) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
f) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
g) $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) =$ $a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

Binomisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0,\dots,n$
c) $E(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X=i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1,2,\dots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X=i) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ for $i = 0,1,2,\dots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \mathrm{Uniform}(a,b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \mathrm{Normal}(\mu,\sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + c$$

har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = (A + A^T)\boldsymbol{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

basert på et datasett (N observasjoner) gitt ved

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \boldsymbol{y}$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Differensiallikninger

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}t = uv - \int uv' \,\mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}t = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

Første ordens lineære differensiallikninger

$$y' + a(t)y = f(t)$$

har løsning gitt ved

$$y = \frac{1}{u} \int f(t)u(t)\ \mathrm{d}t$$

der integrerende faktor $u = u(t)$ er gitt ved

$$u(t) = e^{\int a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Andre ordens lineære differensiallikninger

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

har generell løsning $y = y_h + y_p$ der den homogene løsningen y_h er gitt hjelp av røttene av den karakteristiske likningen

$$r^2 + ar + b = 0$$

Vi har følgende tilfeller:

a) To røtter $r_1 \neq r_2$: $y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
b) En dobbelrot r: $y_h = (C_1 + C_2 t)e^{rt}$
c) Ingen røtter: $y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ der $\alpha = -a/2$ og $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2$

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max/\min \int_a^b F(t, y, y')\ \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{y'}) = 0$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max/\min \int_a^b F(t, y, u)\ \mathrm{d}t$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + pG(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)
eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)
med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$