SENSORVEILEDNING - Skriftlig eksamen

ELE 37191
Matematikk valgfag

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	11.06.2018	Kl. 09:00
Innlevering:	11.06.2018	Kl. 14:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Mandag 11. juni 2018

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

(a) Det linære likningssystemet er

$$\underline{\underline{\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & +11x_3 & +7x_4 & =4 \\ -2x_1 & +6x_2 & -19x_3 & -20x_4 & =-11 \\ x_1 & -3x_2 & +8x_3 & +13x_4 & =7 \end{array}\right.}}$$

(b) Gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & 7 & 4 \\ -2 & 6 & -19 & -20 & -11 \\ 1 & -3 & 8 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

2 ganger rad I legges til rad II:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 1 & -3 & 8 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

Rad I trekkes fra rad III:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Rad II legges til rad III:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rad II divideres med 3:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Dette er en matrise på trappeform (det finnes andre, f. eks. den nest siste).

Det nye likningssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & +11x_3 & +7x_4 & =4 \\ & & x_3 & -2x_4 & =-1 \end{array}\right.$$

har de samme løsningene som det opprinnelige. Systemet har to pivoter: 1 foran x_1 i første likning og 1 foran x_3 i andre likning. Da har vi at $\underline{\underline{x_4 = s}}$ og $\underline{\underline{x_2 = t}}$ er fri parametre. Likning II gir $x_3 = \underline{\underline{-1+2s}}$ og likning I gir da
$x_1 = 4 + 3t - 11(-1+2s) - 7s = \underline{\underline{15 - 29s + 3t}}$.

På vektorform:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -29 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(c) Fordi trappeformen har pivoter i kolonne 1 og 3 er $\underline{\underline{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3\}}}$ en basis for span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. En basis for mengden av alle 3-vektorer må ha 3 elementer. Fordi basisen for span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ bare har to elementer er det 3-vektorer som ikke ligger i span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$.

(d) Vi løser likningssytemet $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ ved å bruke de samme radoperasjonene som i (b). Da får vi på matriseform at

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -29 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvis vi f. eks. setter $s = 1 = t$ får vi

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

(e) Vi beregner

$$B\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1 \quad \text{og} \quad B\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{v}_2$$

Altså er $\boldsymbol{v}_1$ en egenvektor til B med egenverdi 2 og $\boldsymbol{v}_2$ en egenvektor til B med egenverdi -3. Da vet vi at matrisen med egenverdiene som kolonner

$$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}}}$$

diagonaliserer B, dvs $P^{-1}BP$ er diagonalmatrisen med egenverdiene på hoveddiagonalen:

$$P^{-1}BP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi har $\det P = 5$ og dermed er

$$\underline{\underline{P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 2

(a) Marginalsannsynlighetene er gitt som

$$p_X(1) = p(1,2) + p(1,3) + p(1,4) = 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}08 = \underline{\underline{0{,}20}}$$
$$p_X(2) = p(2,2) + p(2,3) + p(2,4) = 0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}09 = \underline{\underline{0{,}30}}$$
$$p_X(3) = p(3,2) + p(3,3) + p(3,4) = 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}03 = \underline{\underline{0{,}40}}$$
$$p_X(4) = p(4,2) + p(4,3) + p(4,4) = 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}03 = \underline{\underline{0{,}10}}$$

$$p_Y(2) = p(1,2) + p(2,2) + p(3,2) + p(4,2) = 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}03 = \underline{\underline{0{,}30}}$$
$$p_Y(3) = p(1,3) + p(2,3) + p(3,3) + p(4,3) = 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}16 + 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}40}}$$
$$p_Y(4) = p(1,4) + p(2,4) + p(3,4) + p(4,4) = 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}03 = \underline{\underline{0{,}30}}$$

(b) Forventningene er gitt som

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) + 4 \cdot p_X(4) \\ &= 0{,}20 + 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}40 + 4 \cdot 0{,}10 = \underline{\underline{2{,}40}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} E(Y) &= 2 \cdot p_Y(2) + 3 \cdot p_Y(3) + 4 \cdot p_Y(4) \\ &= 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}40 + 4 \cdot 0{,}30 = \underline{\underline{3{,}00}} \end{aligned}$$

(c) Vi sammenligner $p_X(x) \cdot p_Y(y)$ med $p(x,y)$ for alle par (x,y) der verdiene er større enn 0. Vi regner:

$$\begin{array}{lll} p_X(1) \cdot p_Y(2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 & p_X(1) \cdot p_Y(3) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08 & p_X(1) \cdot p_Y(4) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 \\ p_X(2) \cdot p_Y(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 & p_X(2) \cdot p_Y(3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12 & p_X(2) \cdot p_Y(4) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 \\ p_X(3) \cdot p_Y(2) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 & p_X(3) \cdot p_Y(3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16 & p_X(3) \cdot p_Y(4) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 \\ p_X(4) \cdot p_Y(2) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03 & p_X(4) \cdot p_Y(3) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04 & p_X(4) \cdot p_Y(4) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03 \end{array}$$

Dette er den samme tabellen som for $p(x,y)$. Altså er $p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$, dvs X og Y er uavhengige.

(d) Fordi X og Y er uavhengige er $\underline{\underline{\mathrm{Cov}(X,Y) = 0}}$.
Generelt gjelder at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$. Dermed får vi $E(XY) = \mathrm{Cov}(X,Y) + E(X) \cdot E(Y) = 0 + 2{,}40 \cdot 3{,}00 = \underline{\underline{7{,}20}}$.

Oppgave 3

(a) Den karakteristiske likningen $r^2 + 10r + 25 = 0$ har en dobbeltrot $r = -5$. Løsningen på den homogene likningen er dermed $y_{\mathrm{h}}(t) = (C_0 + C_1 t)e^{-5t}$. Dessuten er konstantfunksjonen $y_{\mathrm{p}}(t) = 500 : 25 = 20$ en partikulærløsning. Da er $y(t) = (C_0 + C_1 t)e^{-5t} + 20$ den generelle løsningen på differensiallikningen. Videre er $y'(t) = (C_1 - 5C_0 - 5C_1 t)e^{-5t}$. Initalbetingelsene gir likningssystemet

$$\begin{cases} C_0 + 20 = 21 \\ C_1 - 5C_0 = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 6 \end{cases}$$

og løsningen på differensiallikningen er $\underline{\underline{y(t) = (1+6t)e^{-5t} + 20}}$.

(b) Differensiallikningen er separabel fordi vi kan skrive den som $e^{-y}y' = t^{-2}$. Da er $\int e^{-y}y'\mathrm{d}t = \int t^{-2}\mathrm{d}t = -t^{-1} + A$. Men integrasjon med substitusjon $y = y(t)$ gir $\int e^{-y}y'\mathrm{d}t = \int e^{-y}\mathrm{d}y = -e^{-y} + B$. Altså er $e^{-y} = t^{-1} + C$ for en konstant $C \geqslant 0$. Vi bruker ln på begge sider og får $\underline{\underline{y(t) = -\ln(t^{-1} + C)}}$.

Oppgave 4

(a) Vi har på matriseform

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Da gir $\boldsymbol{\beta} = (X^TX)^{-1}(X^T\boldsymbol{y})$ beste tilpasning etter minste kvadraters metode (oppgitt i formelsamlingen). Vi finner at

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad X^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 45 \\ 84 \end{bmatrix}.$$

Så beregner vi

$$\begin{aligned} X^TX &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+1+1+1 & 2+4+1+3 & 7+5+4+9 \\ 2+4+1+3 & 4+16+1+9 & 14+20+4+27 \\ 7+5+4+9 & 14+20+4+27 & 49+25+16+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 25 \\ 10 & 30 & 65 \\ 25 & 65 & 171 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Inversen til denne matrisen er oppgitt i oppgaven. Dermed kan vi beregne

$$\boldsymbol{\beta} = (X^TX)^{-1}(X^T\boldsymbol{y}) = \frac{1}{270} \begin{bmatrix} 905 & -85 & -100 \\ -85 & 59 & -10 \\ -100 & -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 45 \\ 84 \end{bmatrix} = \frac{1}{270} \begin{bmatrix} 1350 \\ 540 \\ -270 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

og $y = 5 + 2x_1 - x_2$ er beste lineære tilpasning til dataene etter minste kvadraters metode.

(b) Vi beregner feilvektoren

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

som har lengde $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \sqrt{13^2+1^2+(-6)^2+(-8)^2} = \sqrt{270} \approx \underline{\underline{16{,}43}}$. Hvis vi i stedet regner feilleddet med $\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ får vi feilvektoren

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

som har lengde $\|\boldsymbol{\varepsilon}'\| = \sqrt{14^2+0^2+(-4)^2+(-8)^2} = \sqrt{276} \approx \underline{\underline{16{,}61}}$ som er større enn $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$.

Oppgave 5

(a) Den karakteristiske likningen $z^2 - 5z + 6 = 0$ har løsninger $z_1 = 2$ og $z_2 = 3$. Dermed er $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. Initialbetingelsene gir likningene

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = e - 1 & (1) \\ C_1 e^2 + C_2 e^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Fra (1) får vi $C_2 = e - 1 - C_1$ som innsatt i (2) gir $C_1 e^2 + (e - 1 - C_1)e^3 = 0$ som litt omformet blir $C_1(e^2 - e^3) = (1-e)e^3$. Vi har $e^2 - e^3 = (1-e)e^2$ så

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(1-e)e^3}{(1-e)e^2} = e \\ C_2 = e - 1 - e = -1 \end{cases}$$

Altså får vi $y(t) = ee^{2t} - e^{3t} = \underline{\underline{e^{2t+1} - e^{3t}}}$

(b) Vi setter $F = \ln(3y - y')e^{-t}$. Vi avgjør først om F er konkav i (y, y'). Vi har

$$F'_y = \frac{3e^{-t}}{3y - y'} \qquad \text{og} \qquad F'_{y'} = \frac{-e^{-t}}{3y - y'}$$

som gir

$$F''_{yy} = \frac{-9e^{-t}}{(3y-y')^2} = A \quad \text{og} \quad F''_{yy'} = \frac{3e^{-t}}{(3y-y')^2} = B \quad \text{og} \quad F''_{y'y'} = \frac{-e^{-t}}{(3y-y')^2} = C$$

Dermed er $AC - B^2 = 0$, $A < 0$ og $C < 0$ så H er konkav i (y, y') og en løsning på Euler-likningen vil derfor gi maksimum.

Vi har videre at

$$\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3y - y'} \cdot e^{-t} + \frac{(3y' - y'')}{(3y - y')^2} \cdot e^{-t}$$

Euler-likningen $F'_y - \frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = 0$ (oppgitt i formelsamlingen) gir dermed

$$\begin{aligned}
\frac{3}{3y-y'}\cdot e^{-t} - \Big(\frac{1}{3y-y'}\cdot e^{-t} + \frac{(3y'-y'')}{(3y-y')^2}\cdot e^{-t}\Big) &= 0 \quad \text{dvs (faktoriserer)}\\
\Big[\frac{3}{3y-y'} - \frac{1}{3y-y'} - \frac{(3y'-y'')}{(3y-y')^2}\Big]\cdot e^{-t} &= 0 \quad \text{dvs (fellesnevner)}\\
\Big[\frac{3(3y-y')-(3y'-y'')-(3y-y')}{(3y-y')^2}\Big]\cdot e^{-t} &= 0 \quad \text{dvs } (e^{-t}>0)\\
3(3y-y')-(3y'-y'')-(3y-y') &= 0 \quad \text{dvs}\\
y''-5y'+6y &= 0
\end{aligned}$$

Dette er likningen fra (a) og da initialbetingelsene (1) og (2) er de samme vil også løsningen bli den samme som for $y(t)$ i (a): $\underline{\underline{y(t) = e^{2t+1} - e^{3t}}}$.

(c) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen (som står i formelsamlingen) $H = \ln(u)e^{-t} + p(3y - u)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y,u). Vi har

$$H'_y = 3p \qquad \text{og} \qquad H'_u = \frac{e^{-t}}{u} - p$$

som gir

$$H''_{yy} = 0 = A \quad \text{og} \quad H''_{yu} = 0 = B \quad \text{og} \quad H''_{uu} = -\frac{e^{-t}}{u^2} = C$$

Dermed er $AC - B^2 = 0 \geqslant 0$, $A = 0 \leqslant 0$ og $C < 0$ så H er konkav i (y,u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi maksimum.

Pontryagin-betingelsene (som står i formelsamlingen)

$$\begin{cases} H'_u = 0 \\ p' = -H'_y \end{cases} \qquad \text{gir} \qquad \begin{cases} \frac{e^{-t}}{u} - p = 0 & (4)\\ p' = -3p & (5)\end{cases}$$

Her er det ganske lett å finne u først. Ved å derivere på begge sider i (4) får vi at $p' = \frac{-e^{-t}u - e^{-t}u'}{u^2} = \frac{(-u-u')e^{-t}}{u^2}$. Fra (5) og (4) får vi likningen

$$-\frac{(u+u')e^{-t}}{u^2} = -3p = -\frac{3e^{-t}}{u} = -\frac{3ue^{-t}}{u^2} \qquad \text{som gir} \qquad u' - 2u = 0.$$

Denne homogene første ordens differensiallikningen har løsningen $u(t) = Ce^{2t}$. Fra (1) får vi da den inhomogene første ordens differensiallikningen

$$y' - 3y = -Ce^{2t}$$

som kan løses ved å multiplisere med en passende integrerende faktor $v = v(t)$ som tilfredsstiller $-3v = v'$. Diff.likningen er separabel: $\frac{v'}{v} = -3$ med $v(t) = e^{-3t}$ som en løsning (vi trenger ikke den generelle løsningen). Vi får den nye differensiallikningen

$$y'v - 3yv = -Ce^{2t}v \qquad \text{dvs} \qquad y'v + yv' = -Ce^{-t} \qquad \text{dvs} \qquad (yv)' = -Ce^{-t}$$

Altså er

$$yv = \int -Ce^{-t}\,\mathrm{d}t = Ce^{-t} + C_2 \qquad \text{og} \qquad y = Ce^{-t}v^{-1} + C_2v^{-1}$$

som gir $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$ der $C_1 = C$. Initialbetingelsene (2) og (3) er de samme som i (a) og C_1 og C_2 blir derfor de samme som i (a): $\underline{\underline{y(t) = e^{2t+1} - e^{3t}}}$. Dessuten er $\underline{\underline{u(t) = e^{2t+1}}}$. Vi merker oss at kontrollproblemet kan omgjøres til variasjonsproblemet i (b) ved substitusjonen $u = 3y - y'$ fra (1) og det forklarer hvorfor løsningen for $y(t)$ er den samme.