EKSAMENSOPPGAVE - Skriftlig eksamen

ELE 37191
Matematikk valgfag

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	11.06.2018	Kl. 09.00
Innlevering:	11.06.2018	Kl. 14.00

Vekt:	100% av ELE 3719
Antall sider i oppgaven:	5 inkl. forsiden
Innføringsark:	Ruter
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator.

Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Mandag 11. juni 2018, kl. 09-14

Oppgavesettet er på 2 sider. Alle 16 underpunkter vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 2 sider.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi har følgende matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & 7 \\ -2 & 6 & -19 & -20 \\ 1 & -3 & 8 & 13 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Skriv ut det lineære likningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(b) Bruk Gausseliminasjon til å omforme den utvidede matrisen til likningssystemet i (a) til en matrise på trappeform. Bruk trappeformen til å løse likningssystemet.

Vi kaller kolonnevektorene i A (fra venstre mot høyre) for $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$.

(c) Finn en basis for span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Avgjør om det finnes 3-vektorer som ikke ligger i span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$.

(d) Finn tall c_1, c_2, c_3, c_4, alle ulik 0, slik at $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + c_4\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$ (nullvektor).

Vi har følgende matriser

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 21 & -10 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(e) Vis at $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ er egenvektorer til B. Finn en (2×2)-matrise P og dens inverse P^{-1} slik at $D = P^{-1}BP$ er en diagonalmatrise.

Oppgave 2

Vi har to simultant fordelte diskrete stokastiske variabler X og Y. Punktsannsynlighetene $p(x,y) = P(X = x,Y = y)$ som er større enn 0 er oppgitt i tabellen:

$$\begin{array}{lll} p(1,2) = 0{,}06 & p(1,3) = 0{,}08 & p(1,4) = 0{,}06 \\ p(2,2) = 0{,}09 & p(2,3) = 0{,}12 & p(2,4) = 0{,}09 \\ p(3,2) = 0{,}12 & p(3,3) = 0{,}16 & p(3,4) = 0{,}12 \\ p(4,2) = 0{,}03 & p(4,3) = 0{,}04 & p(4,4) = 0{,}03 \end{array}$$

(a) Finn de marginale sannsynlighetstetthetene til X og Y ved å oppgi alle verdier større enn 0 for $p_X(x)$ og $p_Y(y)$.

(b) Beregn forventningene $E(X)$ og $E(Y)$.

(c) Avgjør om X og Y er uavhengige.

(d) Bestem kovariansen Cov(X,Y) og forventningen $E(XY)$.

Oppgave 3

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs $y = y(t)$.

(a) Løs differensiallikningen $y'' + 10y' + 25y = 500$ med initialbetingelsene $y(0) = 21$ og $y'(0) = 1$.

(b) Løs differensiallikningen $t^2 y' = e^y$ (med $t > 0$).

Oppgave 4

Vi har to frie (eksogene) variabler x_1 og x_2 og en avhengig (endogen) variabel y og fire observasjoner:

y	x_1	x_2
15	2	7
9	4	5
−3	1	4
−6	3	9

(a) Finn $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ slik at den lineære regresjonsmodellen $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ er den beste tilpasningen til observasjonene etter minste minste kvadraters metode.
Her kan du få bruk for at

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 25 \\ 10 & 30 & 65 \\ 25 & 65 & 171 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{270} \begin{bmatrix} 905 & -85 & -100 \\ -85 & 59 & -10 \\ -100 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$

(b) La $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}$ være vektoren av feilledd. Beregn lengden $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$. Vis ved beregning at den lineær regresjonsmodellen $y = 2 + 3x_1 - x_2$ gir en dårligere tilpasning til observasjonene.

Oppgave 5

(a) Løs differensiallikningen $y'' - 5y' + 6y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = e - 1$ og $y(1) = 0$.

(b) Vi har variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 \ln(3y - y')e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y(0) = e - 1 & (1) \\ y(1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Bruk Euler-likningen til å løse dette.

[Hint: Eulerlikningen kan skrives som en annen ordens homogen differensiallikning.]

(c) Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 \ln(u)e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y' = 3y - u & (1) \\ y(0) = e - 1 & (2) \\ y(1) = 0 & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (angi både y og u).

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Binomisk fordeling

a) $X \sim \text{Binom}(n, p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \ldots, n$
c) $E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \text{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \ldots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \text{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X = i) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + c$$

hvor A er en symmetrisk matrise har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

basert på et datasett med N observasjoner gitt ved

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \ldots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \boldsymbol{y}$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, y')\, \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{y'}) = 0$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, u)\ \mathrm{d}t$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + pG(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)
eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)
med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v\ \mathrm{d}t = uv - \int uv'\ \mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u'\ \mathrm{d}t = \int f(u)\ \mathrm{d}u$$