Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Onsdag 29. mai 2019, kl. 09-14

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

(a) Vi deler likningen på 100 for å få den på standardform: $y'' + 0{,}2y' + 0{,}01y = 3$. Dette er en andre ordens lineær differensiallikning som har karakteristisk likning $r^2 + 0{,}2r + 0{,}01 = 0$ med dobbeltrot $r = -0{,}1$ og partikulær løsning $y_p(t) = 300$. Den generelle løsningen er dermed

$$y(t) = \underline{\underline{(C_0 + C_1 t)e^{-0{,}1t} + 300}}$$

Vi har $(C_0 + C_1 t)e^{-0{,}1t} = \frac{C_0 + C_1 t}{e^{0{,}1t}}$ som (f. eks. ved l'Hôpitals regel) har grense 0 når $t \to \infty$. Dermed er den stabile likevektstilstanden

$$\lim_{t\to\infty}\left[(C_0 + C_1 t)e^{-0{,}1t} + 300\right] = \underline{\underline{300}}$$

som er uavhengig av konstantene C_0 og C_1 og systemet er derfor globalt asymptotisk stabilt.

(b) Dette er en separabel differensiallikning fordi divisjon på begge sider med $(y - 400)$ gir

$$\frac{y'}{y - 400} = -t$$

Fordi $(\ln|y - 400|)'_t = \frac{y'}{y-400}$ får vi

$$\ln(y - 400) = -\frac{1}{2}t^2 + C_0$$

for en ubestemt konstant C_0. Vi setter venstresiden og høyresiden inn i eksponentialfunksjonen e^x og får

$$|y - 400| = e^{-\frac{1}{2}t^2 + C_0} = e^{C_0}e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Altså er den generelle løsningen

$$y(t) = 400 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$$

for en konstant $C = \pm e^{C_0}$. Fra $y(0) = 500$ får vi $Ce^0 = 100$, dvs $C = 100$ og $y(t) = \underline{\underline{400 + 100e^{-\frac{1}{2}t^2}}}$.

Alternativ løsning: Likningen kan også skrives om til en første ordens linær differensiallikning $y' + ty = 400t$. Vi multipliserer med integrerende faktor $e^{\frac{1}{2}t^2}$ og får $(ye^{\frac{1}{2}t^2})'_t = y'e^{\frac{1}{2}t^2} + tye^{\frac{1}{2}t^2} = 400te^{\frac{1}{2}t^2}$. Ved integrasjon med substitusjonen $u = \frac{1}{2}t^2$ får vi $\int 400te^{\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = 400e^{\frac{1}{2}t^2} + C$. Det gir $ye^{\frac{1}{2}t^2} = 400e^{\frac{1}{2}t^2} + C$ dvs $y(t) = 400 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$. Vi finner konstanten C som over.

Oppgave 2

(a) (i) $P(X \leqslant 0\,, Y \leqslant 4) = F(0,4) = 1 - e^{0} - e^{-1,2} + e^{-1,2} = \underline{\underline{0}}$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2\,, 4 \leqslant Y \leqslant 5) &= F(2,5) - F(2,4) \\ &= 1 - e^{-0,4} - e^{-1,5} + e^{-0,4-1,5} - (1 - e^{-0,4} - e^{-1,2} + e^{-0,4-1,2}) \\ &= e^{-1,2} - e^{-1,5} - e^{-0,4}(e^{-1,2} - e^{-1,5}) \\ &= \underline{\underline{(1 - e^{-0,4})(e^{-1,2} - e^{-1,5})}} = \underline{\underline{2,57\%}} \end{aligned}$$

(iii)

$$P(Y \leqslant 5) = \lim_{x\to\infty} F(x,5) = \lim_{x\to\infty}(1 - e^{-0,2x} - e^{-1,50} + e^{-0,2x-1,5}) = \underline{\underline{1 - e^{-1,5}}} = \underline{\underline{77,69\%}}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x,y) = F''_{xy} = (F'_x)'_y &= \begin{cases} (0,2e^{-0,2x} - 0,2e^{-0,2x-0,3y})'_y & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\ &= \underline{\underline{\begin{cases} 0,06e^{-0,2x-0,3y} & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} (F'_x)'_y\,\mathrm{d}y = \big[F'_x(x,y)\big]_{y\to-\infty}^{y\to\infty} \\ &= \begin{cases} \big[0,2e^{-0,2x} - 0,2e^{-0,2x-0,3y}\big]_{y=0}^{y\to\infty} & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0,2e^{-0,2x} - (0,2e^{-0,2x} - 0,2e^{-0,2x}) & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\ &= \underline{\underline{\begin{cases} 0,2e^{-0,2x} & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}}} \end{aligned}$$

Vi kan selvfølgelig også regne direkte på uttrykket

$$\int_{0}^{\infty} 0,06e^{-0,2x-0,3y}\,\mathrm{d}y = \big[-0,2e^{-0,2x-0,3y}\big]_{y=0}^{y\to\infty}\,.$$

Ved å regne på samme måte (eller ved å bruke symmetrien i uttrykket for $F(x,y)$), får vi

$$f_Y(y) = \underline{\underline{\begin{cases} 0,3e^{-0,3y} & \text{hvis } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}}}$$

(c) Ved delvis integrasjon med $u(x) = x$ og $v(x) = -e^{-0,2x}$ får vi $\int x \cdot 0,2e^{-0,2x}\,\mathrm{d}y = -xe^{-0,2x} - \int -e^{-0,2x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-0,2x} - \frac{1}{0,2}e^{-0,2x}$. Da blir

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-xe^{-0,2x} - \frac{1}{0,2}e^{-0,2x}\right]_{x=0}^{x\to\infty} \\ &= 0 - 0 - (0 - \frac{1}{0,2}e^{0}) = \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Ved symmetrien i uttrykket for $F(x,y)$ får vi $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}3} = \underline{\underline{\tfrac{10}{3}}}$.

Vi har

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2x} \cdot 0{,}3e^{-0{,}3y} & \text{hvis } x,y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
$$= f(x,y)$$

som jo betyr at X og Y er uavhengige stokastiske variabler. Da har vi

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot E(Y) \\ &= E(X)\cdot E(Y) \end{aligned}$$

(som vi også vet) og derfor er $E(XY) = 5\cdot\frac{10}{3} = \underline{\underline{\tfrac{50}{3}}}$.

(d) Vi har $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ som er 0 fordi X og Y er uavhengige. Vi har $\mathrm{Cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)^2$ og $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^2\cdot 0{,}2e^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x$. Ved delvis integrasjon med $u(x) = x^2$ og $v(x) = -e^{-0{,}2x}$ får vi $\int x^2\cdot 0{,}2e^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x = -x^2e^{-0{,}2x} - \int -2xe^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x$ og ved utregningen for $E(X)$ får vi $\int xe^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x = (-\frac{x}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}2^2})e^{-0{,}2x}$. Til sammen får vi

$$E(X^2) = \left[-(x^2 + \frac{2}{0{,}2}x + \frac{2}{0{,}2^2})e^{-0{,}2x}\right]_{x=0}^{x\to\infty} = 0 - (-\frac{2}{0{,}2^2}) = 50$$

som gir

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = 50 - 5^2 = 25$$

Ved symmetri i likningene får vi $\mathrm{Cov}(Y,Y) = \frac{2}{0{,}3^2} - \frac{1}{0{,}3^2} = \frac{1}{0{,}3^2} = \frac{100}{9}$. Dermed er kovariansmatrisen

$$\underline{\underline{C = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & \frac{100}{9} \end{bmatrix}}}$$

(e) Pr. definisjon er $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. Fordi X og Y er uavhengige er $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ og dermed er $f_{X|Y}(x|y) = \underline{\underline{f_X(x)}}$ uansett hva y er.

Oppgave 3

(a) Vi beregner indreproduktene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 &= 1\cdot 1+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=0\\ \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_3 &= 1\cdot 1+0\cdot 2+(-1)\cdot 1=0\\ \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3 &= 1\cdot 1+(-1)\cdot 2+1\cdot 1=0\end{aligned}$$

altså er $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ parvis ortogonale.
Vi beregner lengdene

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_1\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}=\sqrt{1\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}\\ \|\boldsymbol{u}_2\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}=\sqrt{1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1)}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}\\ \|\boldsymbol{u}_3\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3}=\sqrt{1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1}=\underline{\underline{\sqrt{6}}}\end{aligned}$$

(b) Vi har

$$A\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot(-1)\\(-1)\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot(-1)\\0\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{u}_1$$

og

$$A\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 1\\(-1)\cdot 1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}=3\boldsymbol{u}_2$$

og

$$A\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 2+0\cdot 1\\(-1)\cdot 1+1\cdot 2+(-1)\cdot 1\\0\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\boldsymbol{u}_3$$

så $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er egenvektorer for A med egenverdiene $\underline{\underline{\lambda_1=2,\ \lambda_2=3 \text{ og } \lambda_3=0}}$.

(c) Vi får

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\underline{\underline{2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3}}$$

Siden $\boldsymbol{u}_3$ er en egenvektor med egenverdi 0 har vi $Q(\boldsymbol{u}_3)=\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{0}=0$ så $\underline{(a,b,c)=(1,2,1)}$ er et nullpunkt for $Q(\boldsymbol{x})$ og tilvarende er også $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{u}_3$ en løsning for alle $t\neq 0$.

(d) Fordi A er en (3×3)-matrise kan A maksimalt ha tre egenverdier som da er de tre egenverdiene vi har funnet i (b). Dermed er $Q(x_1,x_2,x_3)$ positiv semi-definit fordi $\lambda_i\geqslant 0$, men en av egenverdiene er 0 så ikke definit.

(e) Løsning 1: Erstatter $\boldsymbol{x}$ med $P\boldsymbol{y}$ dvs. at $x_1 = y_1 + y_2 + y_3$, $x_2 = -y_2 + 2y_3$ og $x_3 = -y_1 + y_2 + y_3$ og regner direkte

$$\begin{aligned}
Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) &= Q(P\boldsymbol{y}) = Q(y_1 + y_2 + y_3, -y_2 + 2y_3, -y_1 + y_2 + y_3) \\
&= 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + (-y_2 + 2y_3)^2 + 2(-y_1 + y_2 + y_3)^2 \\
&\quad - 2(y_1 + y_2 + y_3)(-y_2 + 2y_3) - 2(-y_2 + 2y_3)(-y_1 + y_2 + y_3) \\
&= 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_1y_2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 + y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2 \\
&\qquad + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 4y_2y_3 \\
&\qquad + 2y_1y_2 - 4y_1y_3 + 2y_2^2 - 4y_2y_3 + 2y_2y_3 - 4y_3^2 \\
&\qquad\qquad - 2y_1y_2 + 2y_2^2 + 2y_2y_3 + 4y_1y_3 - 4y_2y_3 - 4y_3^2 \\
&= \underline{\underline{4y_1^2 + 9y_2^2}}
\end{aligned}$$

Løsning 2: Vi har $Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) = (P\boldsymbol{y})^{\text{T}} A (P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\text{T}}(P^{\text{T}}AP)\boldsymbol{y}$ og så regner vi ut den symmetriske matrisen $P^{\text{T}}AP$. Først regner vi på

$$\begin{aligned}
AP &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Så multipliserer vi denne med P^{T} fra venstre og får med en tilsvarende beregning:

$$P^{\text{T}}(AP) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{4y_1^2 + 9y_2^2}}$$

Løsning 3: La $\boldsymbol{e}_i$ være 3-vektoren som har 1 på i-te plass og 0 ellers. Da vil $P\boldsymbol{e}_i$ være den i-te kolonnen i P som jo er $\boldsymbol{u}_i$. Derfor får vi $P^{\text{T}}AP\boldsymbol{e}_i = P^{\text{T}}A\boldsymbol{u}_i = P^{\text{T}}(\lambda_i\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i(P^{\text{T}}\boldsymbol{u}_i)$. Fordi $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i$ er 0 for $j \neq i$ og lik $\|\boldsymbol{u}_i\|^2$ hvis $j = i$ har vektoren $\lambda_i(P^{\text{T}}\boldsymbol{u}_i)$ verdien $\lambda_i\|\boldsymbol{u}_i\|^2$ på plass i og 0 ellers (dvs. at $\lambda_i(P^{\text{T}}\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i\|\boldsymbol{u}_i\|^2\boldsymbol{e}_i$) og dette gir den i-te søylen til $P^{\text{T}}AP$. Det betyr at

$$P^{\text{T}}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

og dermed er $Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) = \underline{\underline{4y_1^2 + 9y_2^2}}$.

(f) Vi lar 3-vektoren $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ være gitt ved at $\boldsymbol{b} = [-18 \;\; 6 \;\; 6]$. Vi kan løse likningen

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{det vil si} \qquad A\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$$

ved Gausseliminasjon direkte på den utvidete koeffisientmatrisen. Men vi kan også bruke variabelskiftet $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ som gir $AP\boldsymbol{y} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$. Denne likningen multiplisert med P^{T} fra venstre gir likningen

$$P^{\mathrm{T}}AP\boldsymbol{y} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}P)^{\mathrm{T}} \qquad (**)$$

fordi

$$P^{\mathrm{T}}\Big(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\Big) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}P)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fra $(*)$ har vi at $P^{\mathrm{T}}AP$ er diagonal og $(**)$ gir likningsystemet

$$\begin{aligned} 4y_1 &= 12 \\ 9y_2 &= 9 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dermed får vi $y_3 = t$ (en fri parameter), $y_2 = 1$ og $y_1 = 3$. Fra $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ får vi da de kritiske (stasjonære) punktene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Dette er globale minimumspunkter siden A er positiv semi-definit som er ekvivalent med at f er konveks.

Oppgave 4

(a) Dette er en andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter på standarform. Den karakteristisk likningen $r^2 - 1 = 0$ har løsningene $r = \pm 1$ og $y_{\mathrm{p}}(t) = -4$ er en partikulær løsning. Den generelle løsningen er derfor

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - 4$$

Initialbetingelsene gir likninger som bestemmer konstantene C_1 og C_2:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - 4 = 1 \\ y(\ln(3)) &= \frac{C_1}{3} + 3C_2 - 4 = 3 \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 5 \\ C_1 + 9C_2 &= 21 \end{aligned}$$

Vi trekker den første likningen fra den andre og får $8C_2 = 16$ som gir $C_2 = 2$ og fra den første likningen får vi da $C_1 = 5 - 2 = 3$. Det gir funksjonen $y(t) = \underline{\underline{3e^{-t} + 2e^{t} - 4}}$

(b) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen (som står i formelsamlingen) $H = y + 9u - u^2 + p(y+u)$ for en funksjon $p = p(t)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y,u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = 1 + p \\ H'_u = 9 - 2u + p \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} H''_{yy} = 0 = A \\ H''_{yu} = 0 = B \\ H''_{uu} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = 0 \cdot (-2) - 0^2 = 0 \geqslant 0$, $A = 0 \leqslant 0$ og $C = -2 \leqslant 0$ så H er konkav i (y,u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagin-betingelsene (som står i formelsamlingen) gir

$$\begin{cases} 9 - 2u + p = 0 & (4) \\ p' = -(1+p) & (5) \end{cases}$$

Vi deriverer begge sider av (4) og får $p' = 2u'$. Kombinert med (5) gir dette $2u' = -(1+p) = -2u + 8$ ved å bruke (4) igjen, dvs $2(u' + u) = 8$ eller

$$u' + u = 4 \qquad (6)$$

Fra (1) får vi $u = y' - y$ og ved å derivere $u' = y'' - y'$ som vi substituerer inn i (6) og får

$$y'' - y = 4 \qquad (7)$$

som er differensiallikningen i (a) med de samme initialbetingelsene (2) og (3) og løsningen er derfor $y(t) = \underline{\underline{3e^{-t} + 2e^t - 4}}$

For å finne $u(t)$ bruker vi (1): Først har vi

$$y'(t) = -3e^{-t} + 2e^t$$

som så gir $u(t) = y'(t) - y(t) = \underline{\underline{-6e^{-t} + 4}}$.

(c) Fra (1) har vi $u = y' - y$ som gir

$$\begin{aligned} F(y, y', t) = y + 9u - u^2 &= y + 9(y' - y) - (y' - y)^2 \\ &= 9y' - 8y - (y')^2 + 2yy' - y^2 \end{aligned}$$

Variasjonsregningsproblemet blir

$$\text{maks} \int_0^{\ln(3)} \left(9y' - 8y - (y')^2 + 2yy' - y^2\right) \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y(0) = 1 & (1) \\ y(\ln(3)) = 3 & (2) \end{cases}$$

Vi viser først at F er konkav i (y, y'). Vi har

$$\begin{cases} F'_y = -8 + 2y' - 2y \\ F'_{y'} = 9 - 2y' + 2y \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} F''_{yy} = -2 = A \\ F''_{yy'} = 2 = B \\ F''_{y'y'} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-2)^2 - (2)^2 = 0 \geqslant 0$, $A = -2 \leqslant 0$ og $C = -2 \leqslant 0$ så H er konkav i (y, y') og en løsning på Euler-likningen vil derfor gi et maksimum.

Vi har

$$\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = (F'_{y'})'_t = -2y'' + 2y'$$

Euler-likningen (som står i formelsamlingen) blir derfor

$$-8 + 2y' - 2y + 2y'' - 2y' = 0 \quad \text{dvs} \quad y'' - y = 4$$

som er differensiallikningen i (a) med de samme initialbetingelsen så $y(t) = \underline{\underline{3e^{-t} + 2e^t - 4}}$.