

Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Onsdag 29. mai 2019, kl. 09-14

Oppgavesettet har 16 underpunkter som alle vektes likt.

Vedlagte formelsamling er på 2 sider.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi lar y betegne en funksjon av t , dvs $y = y(t)$.

- (a) Løs differensiallikningen $100y'' + 20y' + y = 300$. Finn den stabile likevektstilstanden og avgjør om systemet er globalt asymptotisk stabilt.
- (b) Løs differensiallikningen $y' = (400 - y)t$ med $y(0) = 500$.

Oppgave 2

Vi har to simultant fordelte stokastiske variabler X og Y som har kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0,2x} - e^{-0,3y} + e^{-0,2x-0,3y} & \text{hvis } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

som betyr at $P(X \leq a, Y \leq b) = F(a, b)$.

- (a) Beregn sannsynlighetene
 - (i) $P(X \leq 0, Y \leq 4)$
 - (ii) $P(X \leq 2, 4 \leq Y \leq 5)$
 - (iii) $P(Y \leq 5)$
- (b) Beregn den simultane sannsynlighetstettheten $f(x, y)$ og de marginale sannsynlighetstetthetene $f_X(x)$ og $f_Y(y)$.
- (c) Beregn $E(X)$, $E(Y)$ og $E(XY)$.
- (d) Bestem kovariansmatrisen C .
- (e) Bestem den betingede sannsynlighetstettheten $f_{X|Y}(x|y)$.

Oppgave 3

Vi har

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

som gir en kvadratisk form $Q(x_1, x_2, x_3) = Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

- Vis at $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ er parvis ortogonale og beregn lengdene $\|\mathbf{u}_i\|$ til vektorene.
- Vis at $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ er egenvektorer for A og finn de tilhørende egenverdiene.
- Skriv opp uttrykket for $Q(x_1, x_2, x_3)$ som en annengradsform i x_1 , x_2 og x_3 og finn verdier $x_1 = a$, $x_2 = b$ og $x_3 = c$, ikke alle lik 0, slik at $Q(a, b, c) = 0$.
- Avgjør om $Q(x_1, x_2, x_3)$ er negativ eller positiv (semi-)definit, eller indefinit.

Vi har (3×3) -matrisen $P = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3]$ og innfører nye variabler $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ slik at $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$. Vi får en ny kvadratisk form $Q^{ny}(y_1, y_2, y_3) = Q(P\mathbf{y}) = (P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y})$.

- Skriv opp uttrykket for $Q^{ny}(y_1, y_2, y_3)$ som en annengradsform i y_1 , y_2 og y_3 .
- Bestem de kritiske (stasjonære) punktene til annengradsfunksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = Q(\mathbf{x}) - 18x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 7$$

og avgjør om de er maksimumpunkter, minimumpunkter, eller sadelpunkter.

Oppgave 4

Vi lar y og u betegne funksjoner av t , dvs $y = y(t)$ og $u = u(t)$.

- Løs differensiallikningen $y'' - y = 4$ med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(\ln(3)) = 3$.
- Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^{\ln(3)} y + 9u - u^2 \, dt, \quad \begin{cases} y' = y + u & (1) \\ y(0) = 1 & (2) \\ y(\ln(3)) = 3 & (3) \end{cases}$$

Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (bestem både y og u).

- Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Binomisk fordeling

- a) $X \sim \text{Binom}(n, p)$ med $n \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$
- b) $p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \dots, n$
- c) $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

- a) $X \sim \text{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
- b) $p(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \dots$
- c) $E(X) = 1/p$, $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

- a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
- b) $p(X = i) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$ for $i = 0, 1, 2, \dots$
- c) $E(X) = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

- a) $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ med $a < b$
- b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
- c) $E(X) = (a+b)/2$, $\text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Ekspontentialfordeling

- a) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
- b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
- c) $E(X) = 1/\lambda$, $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

- a) $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ med $\sigma > 0$
- b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
- c) $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B \mathbf{x} + c$$

hvor A er en symmetrisk matrise har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

basert på et datasett med N observasjoner gitt ved

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, y') dt$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{y'}) = 0$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, u) \, dt$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + p G(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)

eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)

med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dt = uv - \int uv' \, dt$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \, dt = \int f(u) \, du$$