Eksamen i ELE3719 - Matematikk valgfag

Tirsdag 3. desember 2019, kl. 09-14

LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

(a) Vi beregner indreproduktene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 &= -2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 0 = 0 \\ \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= -2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 5 = 0 \\ \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= -1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot 5 = 0 \end{aligned}$$

altså er $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ parvis ortogonale.
Vi beregner lengdene

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_1\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} = \sqrt{(-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1} = \underline{\underline{\sqrt{6}}} \\ \|\boldsymbol{u}_2\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2} = \sqrt{(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 0\cdot 0)} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} \\ \|\boldsymbol{u}_3\| &= \sqrt{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3} = \sqrt{2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 5\cdot 5} = \underline{\underline{\sqrt{30}}} \end{aligned}$$

(b) Vi har

$$A\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot(-2) + (-5)\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 2\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = -6\boldsymbol{u}_1$$

og

$$A\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot(-1) + (-5)\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\boldsymbol{u}_2$$

og

$$A\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ 0\cdot 2 + (-5)\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{u}_3$$

så $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ og $\boldsymbol{u}_3$ er egenvektorer for A med egenverdiene $\underline{\underline{\lambda_1 = -6}}$, $\underline{\underline{\lambda_2 = -5}}$ og $\underline{\underline{\lambda_3 = 0}}$.

(c) Vi får

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \underline{\underline{-5x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3}}$$

Siden $\boldsymbol{u}_1$ er en egenvektor med egenverdi -6 har vi
$Q(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}(-6\boldsymbol{u}_1) = -6\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = -6\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = (-6)\cdot 6 = -36$ så $\underline{\underline{(a, b, c) = (-2, -1, 1)}}$.
Tilvarende er også $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_3$ en løsning for alle tall t fordi

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_3) &= (\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_3)^{\mathrm{T}} A (\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} + t\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}})(A\boldsymbol{u}_1 + tA\boldsymbol{u}_3) \\ &= (\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} + t\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}})(-6\boldsymbol{u}_1) = -6\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = -6\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = (-6)\cdot 6 = -36. \end{aligned}$$

(d) Fordi A er en (3×3)-matrise kan A maksimalt ha tre egenverdier som da er de tre egenverdiene vi har funnet i (b). Dermed er $Q(x_1, x_2, x_3)$ negativ semi-definitt fordi $\lambda_i \leqslant 0$ for alle i, men en av egenverdiene er 0 så ikke definitt.

(e) Vi utvikler determinanten langs siste rad:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= [(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2] - 0 + 5[(-2)\cdot 2 - (-1)\cdot(-1)] = -5 - 25 = \underline{\underline{-30}}$$

Fordi $\det(P) \neq 0$ er rangen til P maksimal, dvs. $\underline{\underline{\operatorname{rk} P = 3}}$.

(f) Løsning 1: Vi har $Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) = (P\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)\boldsymbol{y}$ og så regner vi ut den symmetriske matrisen $P^{\mathrm{T}}AP$. Først regner vi på

$$AP = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -5\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 & (-5)\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 2\cdot 0 & (-5)\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ 0\cdot(-2) + (-5)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + (-5)\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + (-5)\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ 2\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 5\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 6 & -10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så multipliserer vi denne med P^{T} fra venstre og får med en tilsvarende beregning:

$$P^{\mathrm{T}}(AP) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 6 & -10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-36y_1^2 - 25y_2^2}}$$

Løsning 2: La $\boldsymbol{e}_i$ være 3-vektoren som har 1 på i-te plass og 0 ellers (f. eks. er $\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$). Da vil $P\boldsymbol{e}_i$ være den i-te kolonnen i P som jo er $\boldsymbol{u}_i$ (f. eks. er $P\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \boldsymbol{u}_2$). Derfor får vi $P^{\mathrm{T}}AP\boldsymbol{e}_i = P^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_i = P^{\mathrm{T}}(\lambda_i \boldsymbol{u}_i) = \lambda_i(P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i)$. Fordi $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i$ er 0 for $j \neq i$ og lik $\|\boldsymbol{u}_i\|^2$ hvis $j = i$ har vektoren $\lambda_i(P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i)$ verdien $\lambda_i\|\boldsymbol{u}_i\|^2$ på plass i og 0 ellers (dvs. at $\lambda_i(P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i\|\boldsymbol{u}_i\|^2\boldsymbol{e}_i$, så f. eks. $\lambda_2(P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2) = \lambda_2\left[\begin{smallmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \lambda_2\left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_2 \end{smallmatrix}\right] = \lambda_2\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \|\boldsymbol{u}_2\|^2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} (-5)\cdot 0 \\ (-5)\cdot 5 \\ (-5)\cdot 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$) og dette gir den i-te søylen til $P^{\mathrm{T}}AP$. Det betyr at

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og dermed er $Q^{\text{ny}}(y_1, y_2, y_3) = \underline{\underline{-36y_1^2 - 25y_2^2}}$.

Oppgave 2

(a) Dette er en første ordens lineær differensiallikning. Vi multipliserer begge sider med den integrerende faktoren e^{-t} og får $y'e^{-t} - ye^{-t} = -3e^{-1{,}5t}$. Men venstresiden er resultatet av å bruke produktregelen for derivasjon og derfor får vi likningen $(ye^{-t})' = -3e^{-1{,}5t}$. Når vi integrerer begge sider med hensyn på t får vi likningen $ye^{-t} = 2e^{-1{,}5t} + C$ for et ubestemt tall C. Vi multipliser med e^t på begge sider slik at vi får $y(t) = 2e^{-0{,}5t} + Ce^t$. Initialbetingelsen gir likningen $2 \cdot 1 + C \cdot 1 = 5$, dvs $C = 3$ og $\underline{\underline{y(t) = 2e^{-0{,}5t} + 3e^t}}$

(b) Vi ser at at denne differensiallikningen kan separeres ved at vi faktoriserer t ut på høyre side: $yy' = (y^2+1)t$, deler på y^2+1 på begge sider, og multipliserer med 2 på begge sider. Vi har da den separable differesiallikningen

$$\frac{2yy'}{y^2+1} = 2t \qquad (*)$$

Substitusjonen $u = y^2 + 1$ gir $u' = 2yy'$ og derfor

$$\int \frac{2yy'}{y^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}t = \ln(u) + C_1$$

Høyresiden av $(*)$ gir $\int 2t\,\mathrm{d}t = t^2 + C_2$ og vi får likningen $\ln(y^2+1) = t^2 + C_0$ hvor $C_0 = C_2 - C_1$ er en ubestemt konstant. Vi løser denne likningen for y ved å sette venstresiden og høyresiden inn i eksponentialfunksjonen. Da får vi likningen $y^2 + 1 = Ce^{t^2}$ hvor $C = e^{C_0}$. Dette gir to muligheter: $y(t) = \pm\sqrt{Ce^{t^2} - 1}$. Initialverdien gir likningen $2 = \pm\sqrt{Ce^0 - 1}$, dvs $+$ og $C = 5$. Dermed får vi $\underline{\underline{y(t) = \sqrt{5e^{t^2} - 1}}}$.

Oppgave 3

(ai) Fordi $0{,}35e^{-0{,}5x-0{,}7y} = 0{,}35e^{-0{,}5x}e^{-0{,}7y}$ får vi

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 1\,, 2 \leqslant Y \leqslant 3) &= \int_2^3 \int_0^1 0{,}35e^{-0{,}5x}e^{-0{,}7y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0{,}35 \cdot \int_2^3 \left(\int_0^1 e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x\right) e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y \\
&= 0{,}35 \cdot \frac{1}{-0{,}5} \cdot \left[e^{-0{,}5x}\right]_0^1 \cdot \int_2^3 e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y = -0{,}7 \cdot \left(e^{-0{,}5} - 1\right) \int_2^3 e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y \\
&= 0{,}7 \cdot \left(1 - e^{-0{,}5}\right) \cdot \frac{1}{-0{,}7}\left[e^{-0{,}7y}\right]_2^3 = 0{,}7 \cdot \left(1 - e^{-0{,}5}\right) \cdot \frac{1}{-0{,}7}\left(e^{-2{,}1} - e^{-1{,}4}\right) \\
&= \underline{\underline{\left(1 - e^{-0{,}5}\right) \cdot \left(e^{-1{,}4} - e^{-2{,}1}\right)}} = \underline{\underline{4{,}88\%}}
\end{aligned}$$

(aii) Vi regner først på uttrykket for $P(X \leqslant a\,, Y \leqslant 5)$ og deretter undersøker vi grensen når $a \to \infty$.

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant a\,, Y \leqslant 5) &= \int_0^5 \int_0^a 0{,}35e^{-0{,}5x}e^{-0{,}7y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0{,}35 \cdot \int_0^5 \left(\int_0^a e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x\right) e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y \\
&= 0{,}35 \cdot \frac{1}{-0{,}5} \cdot \left[e^{-0{,}5x}\right]_0^a \cdot \int_0^5 e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y = -0{,}7 \cdot \left(e^{-0{,}5a} - 1\right) \int_0^5 e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y \\
&= 0{,}7 \cdot \left(1 - e^{-0{,}5a}\right) \cdot \frac{1}{-0{,}7}\left[e^{-0{,}7y}\right]_0^5 = 0{,}7 \cdot \left(1 - e^{-0{,}5a}\right) \cdot \frac{1}{-0{,}7}\left(e^{-3{,}5} - e^0\right) \\
&= \left(1 - e^{-0{,}5a}\right) \cdot \left(1 - e^{-3{,}5}\right) \xrightarrow[a \to \infty]{} \underline{\underline{1 - e^{-3{,}5}}} = \underline{\underline{96{,}98\%}}
\end{aligned}$$

(b) Vi regner på $P(X \leqslant a\,, Y \leqslant b)$ som over og får

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant a\,, Y \leqslant b) &= \int_0^b \int_0^a 0{,}35 e^{-0{,}5x} e^{-0{,}7y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0{,}35 \cdot \left(\int_0^a e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_0^b e^{-0{,}7y}\mathrm{d}y\right) \\
&= 0{,}35 \cdot \frac{1}{-0{,}5}\left[e^{-0{,}5x}\right]_0^a \cdot \frac{1}{-0{,}7}\left[e^{-0{,}7y}\right]_0^b = \left(e^{-0{,}5a} - 1\right) \cdot \left(e^{-0{,}7b} - 1\right) \\
&= 1 - e^{-0{,}5a} - e^{-0{,}7b} + e^{-0{,}5a-0{,}7b}
\end{aligned}
$$

Vi erstatter a med x og b med y og får den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x\,, y)$.

(c) Vi bruker definisjonen på $f_X(x)$:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty 0{,}35 e^{-0{,}5x-0{,}7y}\,\mathrm{d}y = 0{,}35 e^{-0{,}5x} \int_0^\infty e^{-0{,}7y}\,\mathrm{d}y \\
&= -0{,}5 e^{-0{,}5x} \cdot \left[e^{-0{,}7y}\right]_{y=0}^{y\to\infty} = 0{,}5 e^{-0{,}5x}
\end{aligned}
$$

som gir

$$
\underline{\underline{f_X(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{hvis } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}}}
$$

Ved å regne på samme måte (eller ved å bruke symmetrien i uttrykket for $f(x, y)$), får vi

$$
\underline{\underline{f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}7e^{-0{,}7y} & \text{hvis } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}}}
$$

(d) Ved delvis integrasjon med $u(x) = x$ og $v(x) = -e^{-0{,}5x}$ får vi
$\int x \cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}y = -xe^{-0{,}5x} - \int -e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-0{,}5x} - \frac{1}{0{,}5}e^{-0{,}5x}$. Da blir

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-0{,}5x} - \frac{1}{0{,}5}e^{-0{,}5x}\right]_{x=0}^{x\to\infty} \\
&= 0 - 0 - (0 - \frac{1}{0{,}5}e^0) = \underline{\underline{2}}
\end{aligned}
$$

Ved symmetrien i uttrykket for $F(x, y)$ får vi $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}7} = \underline{\underline{\tfrac{10}{7}}}$.

Vi har

$$
\begin{aligned}
f_X(x) f_Y(y) &= \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} \cdot 0{,}7e^{-0{,}7y} & \text{hvis } x, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\
&= f(x, y)
\end{aligned}
$$

som jo betyr at X og Y er uavhengige stokastiske variabler. Da har vi

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty xy f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty xy f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^\infty x f_X(x) \cdot \left[\int_{-\infty}^\infty y f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot E(Y) \\
&= E(X) \cdot E(Y)
\end{aligned}
$$

(som vi også vet) og derfor er $E(XY) = 2 \cdot \frac{10}{7} = \underline{\underline{\tfrac{20}{7}}}$.

(e) Vi har $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ som er 0 fordi X og Y er uavhengige. Vi har $\text{Cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)^2$ og $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx$. Ved delvis integrasjon med $u(x) = x^2$ og $v(x) = -e^{-0{,}5x}$ får vi $\int x^2 \cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx = -x^2e^{-0{,}5x} - \int -2xe^{-0{,}5x}\,dx$ og ved utregningen for $E(X)$ får vi $\int xe^{-0{,}5x}\,dx = (-\frac{x}{0{,}5} - \frac{1}{0{,}5^2})e^{-0{,}5x}$. Til sammen får vi

$$E(X^2) = \left[-(x^2 + \frac{2}{0{,}5}x + \frac{2}{0{,}5^2})e^{-0{,}5x}\right]_{x=0}^{x\to\infty} = 0 - (-\frac{2}{0{,}5^2}) = 8$$

som gir

$$\text{Cov}(X,X) = \text{Var}(X) = 8 - 2^2 = 4$$

Ved symmetri i likningene får vi $\text{Cov}(Y,Y) = \frac{2}{0{,}7^2} - \frac{1}{0{,}7^2} = \frac{1}{0{,}7^2} = \frac{100}{49}$. Dermed er kovariansmatrisen

$$\underline{\underline{C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{100}{49} \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 4

(a) Denne lineære andreordens differensiallikningen er homogen med karakteristisk likning $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ som har løsningene $r = -0{,}5$ og $r = 1$. Det gir den generelle løsningen $y(t) = C_1e^{-0{,}5t} + C_2e^t$. Initialbetingelsene gir likningssettet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ \frac{1}{2}C_1 + 4C_2 = 13 \end{cases}$$

som har løsningen $C_1 = 2$, $C_2 = 3$, dvs $\underline{\underline{y(t) = 2e^{-0{,}5t} + 3e^t}}$.

(b) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen (som står i formelsamlingen) $H = (1-u^2)e^{-\frac{t}{2}} + p(y - 3u)$ for en funksjon $p = p(t)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y,u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = p \\ H'_u = -2ue^{-\frac{t}{2}} - 3p \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \begin{cases} H''_{yy} = 0 = A \\ H''_{yu} = 0 = B \\ H''_{uu} = -2e^{-\frac{t}{2}} = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = 0 \geqslant 0$, $A = 0 \leqslant 0$ og (fordi $e^{-\frac{t}{2}} > 0$) er $C = -2e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 0$ for alle y og u så H er konkav i (y,u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagin-betingelsene (som står i formelsamlingen) gir

$$\begin{cases} -2ue^{-\frac{t}{2}} - 3p = 0 \\ p' = -p \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 3p = -2ue^{-\frac{t}{2}} \\ p' + p = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} p = -\frac{2}{3}ue^{-\frac{t}{2}} & (4) \\ p' + p = 0 & (5) \end{cases}$$

Ved å derivere (4) får vi ved å bruke produktregelen at $p' = -\frac{2}{3}[u'e^{-\frac{1}{2}} + u(e^{-\frac{1}{2}t})'] = -\frac{2}{3}(u' - \frac{1}{2}u)e^{-\frac{1}{2}t}$. Vi setter dette og (4) inn i (5) og får $-\frac{2}{3}(u' - \frac{1}{2}u)e^{-\frac{1}{2}t} + \left(-\frac{2}{3}ue^{-\frac{t}{2}}\right) = 0$ som etter litt forenkling (vi deler med $-\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}$ på begge sider og trekker sammen) gir differensiallikningen (6): $u' + \frac{1}{2}u = 0$. Fra (1) får vi (7): $u = \frac{1}{3}(y - y')$ og ved å derivere (7) får vi (8): $u' = \frac{1}{3}(y' - y'')$. Vi setter (7) og (8) inn i (6) og får etter litt forenkling differensiallikningen $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$ som er den samme som i (a) med de samme initialbetingelsene. Dermed er $\underline{\underline{y(t) = 2e^{-0{,}5t} + 3e^t}}$. Videre er $y'(t) = -e^{-0{,}5t} + 3e^t$ og fra (7) får vi $\underline{\underline{u(t) = e^{-0.5t}}}$.

Alternativ: Vi kan løse (6) direkte: $u(t) = Ce^{-0{,}5t}$. Da gir (1) differensiallikningen $y' - y = 1{,}5Ce^{-0{,}5t}$ som vi løser ved å multiplisere med den integrerende faktoren e^{-t} på begge sider. Det gir $(ye^{-t})' = 1{,}5Ce^{-1{,}5t}$ som etter integrering gir $ye^{-t} = C_1e^{-1{,}5t} + C_2$ (med $C_1 = -C$). Etter multiplikasjon med e^t på begge sider får vi $y(t) = C_1e^{-0{,}5t} + C_2e^t$. Dette er den generelle løsningen som vi fikk i (a) og med de samme initialbetingelsene får vi $y(t) = 2e^{-0{,}5t} + 3e^t$. Så finner vi $u(t)$ som over eller ved å regne ut $y'(t)$ og sette inn $t = 0$ i (1). Det siste gir likningen $2 = 5 - 3C$ som har løsningen $C = 1$.

(c) Fra (7): $u = \frac{1}{3}(y - y')$ får vi

$$F(y, y', t) = \left(1 - (\frac{1}{3}(y - y'))^2\right)e^{-\frac{t}{2}} = \left(1 - \frac{1}{9}\left(y^2 - 2yy' + (y')^2\right)\right)e^{-\frac{t}{2}}$$

Variasjonsregningsproblemet blir

$$\text{maks} \int_0^{2\ln(2)} \left(1 - \frac{1}{9}\left(y^2 - 2yy' + (y')^2\right)\right)e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y(0) = 5 & (1) \\ y(2\ln(2)) = 13 & (2) \end{cases}$$

Vi viser først at F er konkav i (y, y'). Vi har

$$\begin{cases} F'_y = \left(-\frac{2}{9}y + \frac{2}{9}y'\right)e^{-\frac{t}{2}} \\ F'_{y'} = \left(\frac{2}{9}y - \frac{2}{9}y'\right)e^{-\frac{t}{2}} \end{cases} \qquad \text{som gir} \qquad \begin{cases} F''_{yy} = -\frac{2}{9}e^{-\frac{t}{2}} = A \\ F''_{yy'} = \frac{2}{9}e^{-\frac{t}{2}} = B \\ F''_{y'y'} = -\frac{2}{9}e^{-\frac{t}{2}} = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = \left[\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{2}{9}\right)^2\right]e^{-t} = 0 \geqslant 0$: Fordi $e^{-\frac{t}{2}} > 0$ vil $A \leqslant 0$ og $C \leqslant 0$. Dermed er H konkav i (y, y') og en løsning på Euler-likningen vil derfor gi et maksimum.

Vi bruker produktregelen og får

$$\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = (F'_{y'})'_t = -\frac{1}{9}\left(2y'' - 3y' + y\right)e^{-\frac{t}{2}}$$

Euler-likningen (som står i formelsamlingen) blir derfor

$$\frac{1}{9}\left(2y' - 2y\right)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}\left(2y'' - 3y' + y\right)e^{-\frac{t}{2}} = 0$$

Vi multipliserer begge sider av likningen med $\frac{9}{2}e^{\frac{t}{2}}$ og trekker sammen til $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$ som er den samme differensiallikningen som i (b) og i (a) med de samme initialbetingelsene. Dermed er $\underline{\underline{y(t) = 2e^{-0{,}5t} + 3e^t}}$.